আধুনিক জ্যামিতি

(কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃক নির্ধারিত নূতন সিলেবাস্ অনুযায়ী লিখিত)

কটক রাভেন্স কলেজের ভূতপূর্ব গণিতাধ্যাপক ও 'ম্যাট্রিকুলেশন জিওমেট্রি' 'কনিক সেকশনস্' ইত্যাদি বহুগ্রন্থ প্রণেতা

রায় সারদাকান্ত গঙ্গোপাধ্যায় বাহাদুর, এম, এ

ও

কলিকাতা প্রেসিডেন্সি কলেজের ভূতপূর্ব গণিতাধ্যাপক ও শিবপুর বেঙ্গল ইঞ্জিনিয়ারিং কলেজের অধ্যাপক স্বর্ণ-পদক প্রাপ্ত এবং বহুগ্রন্থ-প্রণেতা

শ্রীঅনন্তমোহন সেন, এম, এ প্রণীত।

শ্রীব্রজেন্দ্রমোহন দত্ত

ষ্টুডেণ্টস্ লাইব্রেরী

৫৭।১, কলেজ ষ্ট্রীট, কলিকাতা

১৯৩৬

সূচীপত্র

প্রথম ভাগ

দ্বিতীয় ভাগ

তৃতীয় ভাগ

চতুর্থ ভাগ

পঞ্চম ভাগ

পরিভাষা

acute angle সূক্ষ্মকোণ
adjacent সন্নিহিত
alternate একান্তর
alternative proof বিকল্প প্রমাণ
altitude, height উচ্চতা, উন্নতি
ambiguous দ্ব্যর্থক
analysis বিশ্লেষণ
angle কোণ
arc চাপ
area কালি, ক্ষেত্রফল
arm ভুজ, বাহু
axiom স্বতঃসিদ্ধ
axis অক্ষ
axis of projection অভিক্ষেপাক্ষ
axis of symmetry প্রতিসাম্য-অক্ষ
base ভূমি
bisection দ্বিখণ্ডন
bisector দ্বিখণ্ডক
boundary সীমা
centre কেন্দ্র
centre of similitude সাম্যকেন্দ্র
centroid ভরকেন্দ্র
chord জ্যা
circle বৃত্ত
circumcentre পরিকেন্দ্র
circumference পরিধি
circumscribed পরিলিখিত
circumscribed circle (circumcircle) পরিবৃত্ত
collinear (points) একরেখীয়
common tangent সাধারণ স্পর্শক
complementary (angle) পূরক
concentric এককেন্দ্রীয়
conclusion সিদ্ধান্ত
concurrent সমবিন্দু
congruent সর্বসম
conjugate অনুবন্ধী, প্রতিযোগী
constant ধ্রুবক
construction অঙ্কন
contact স্পর্শ
converse বিপরীত
conversely বিপরীতক্রমে
converse proposition বিপরীত প্রতিজ্ঞা
corollary অনুসিদ্ধান্ত
corresponding (angle) অনুরূপ

curve (in general sense) রেখা
curved বক্র
cyclic বৃত্তস্থ
data উপাত্ত
deduction সিদ্ধান্ত
degree অংশ, ডিগ্রী
diameter ব্যাস
diagonal কর্ণ
diagonal scale কর্ণমাপনী
dimensions আয়তন
direct (tangent) সরল
direct (proof) অন্বয়ী
direction দিক্
divided externally বহির্বিভক্ত
divided internally অন্তর্বিভক্ত
enunciation নির্বচন
equiangular সদৃশকোণ
equidistant সমদূরবর্তী
equilateral সমবাহু
escribed বহির্লিখিত
ex-centre বহিঃকেন্দ্র
ex-circle বহির্বৃত্ত
exterior angle বহিঃকোণ
external বহিঃস্থ
external bisector বহির্দ্বিখণ্ডক
external contact বহিঃস্পর্শ
figure চিত্র
foot (of the perpendicular) পাদবিন্দু
graph লেখ
graphical লৈখিক
harmonic (section) সমঞ্জস
height (altitude দেখ)
hypotenuse অতিভুজ
hypothesis কল্পনা
hypothetical (construction) কল্পনাসিদ্ধ
identical একরূপ
image বিম্ব
incentre অন্তঃকেন্দ্র
incircle অন্তর্বৃত্ত
included angle অন্তর্ভূত কোণ
indirect (proof) ব্যতিরেকী
inscribed অন্তর্লিখিত
inscribed circle অন্তর্বৃত্ত
interior angle অন্তঃকোণ
interior opposite angle বিপরীত অন্তঃকোণ
internal অন্তঃস্থ
internal bisector অন্তর্দ্বিখণ্ডক

internal contact অন্তঃস্পর্শ
intersection ছেদ, প্রতিচ্ছেদ
inverse বিপরীত, ব্যস্ত
irregular বিষম
isosceles সমদ্বিবাহু
limiting position পরিণাম অবস্থান
limiting point পরিণামবিন্দু
line রেখা
locus সঞ্চারপথ
major arc অধিচাপ
measurement মাপন। মাপ
medial section আয়াম ছেদ
median মধ্যমা
middle point মধ্যবিন্দু
minor arc উপচাপ
minute মিনিট, কলা
nine-point circle নববিন্দুবৃত্ত
obtuse angle স্থূলকোণ
opposite (*e.g.*, angle) বিপরীত
orthocentre লম্ববিন্দু
orthogonal সমকোণীয়
orthogonal projection লম্ব-অভিক্ষেপ
parallel সমান্তরাল
parallelogram সামান্তরিক
pedal line পাদরেখা
pedal triangle পাদত্রিভুজ
pentagon পঞ্চভুজ
perimeter পরিসীমা
perpendicular লম্ব
perpendicular bisector লম্ব-দ্বিখণ্ডক
plane সমতল
point বিন্দু
point of concurrency সম্পাতবিন্দু
point of contact স্পর্শবিন্দু
polygon বহুভুজ
postulate স্বীকার্য
practical ব্যবহারিক, ফলিত
problem সম্পাদ্য। প্রশ্ন
projected অভিক্ষিপ্ত
projection অভিক্ষেপ
proof প্রমাণ
proportional আনুপাতিক
proposition প্রতিজ্ঞা
proved প্রমাণিত
quadrilateral চতুর্ভুজ
quaesita করণীয়

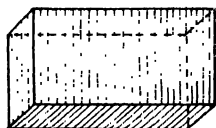
radical axis মূলাক্ষ
radical centre মূলকেন্দ্র
radius অর, ব্যাসার্ধ
rectangle আয়তক্ষেত্র
rectilineal figure ঋজুরেখ ক্ষেত্র
reflex angle প্রবৃদ্ধ কোণ
regular সুষম
rhombus রম্বস
right angle সমকোণ
ruler (scale দেখ)
scale, ruler মাপনী
scalene বিষমভুজ, বিষমবাহু
secant ছেদক
second সেকেণ্ড, বিকলা
sector বৃত্তকলা
segment (of a circle) বৃত্তাংশ
angle in a segment
  বৃত্তাংশস্থ কোণ
segment (of a line) খণ্ড, অংশ
semi-circle অর্ধবৃত্ত
side ভুজ, বাহু
similar (triangle) সদৃশ
similarity সাদৃশ্য
similitude সাম্য
size আয়তন
solid ঘন। ঘন বস্তু
space স্থান
square বর্গক্ষেত্র
straight সরল, ঋজু
straight angle সরল কোণ
subtended angle সম্মুখ কোণ
superposition উপরিপাত
supplementary (angle)
  সম্পূরক
surface তল, পৃষ্ঠ
symmetry প্রতিসাম্য
synthesis সংশ্লেষণ
tangent স্পর্শক
theoretical তত্ত্বীয, বাদীয
theorem উপপাদ্য
transversal ভেদক
transverse (tangent) তির্যক্
trapezium ট্রাপিজিয়ম
triangle ত্রিভুজ
trisection ত্রিখণ্ডন
vertex শীর্ষ
vertical angle শিরঃকোণ
vertically opposite বিপ্রতীপ

আধুনিক জ্যামিতি

প্রথম ভাগ

উপক্রমণিকা

ঘন, তল, রেখা ও বিন্দু পরিচয়

বোধ হয় তোমরা সকলেই ইট দেখিয়াছ। নিম্নে একখানি ইটের চিত্র দেওয়া হইল। এইরূপ একখানি ইট লও। ইহা কত লম্বা, কত

চওড়া ও কত পুরু বলিতে পার কি? মনে কর, ইহা ১০ ইঞ্চি লম্বা, ৫ ইঞ্চি চওড়া এবং ৩ ইঞ্চি পুরু। তাহা হইলেই আমরা বলি, ইটখানার দৈর্ঘ্য (length) ১০ ইঞ্চি, প্রস্থ বা বিস্তার (breadth) ৫ ইঞ্চি এবং বেধ (thickness) ৩ ইঞ্চি। ইটখানি একটি **ঘন বস্তু** (solid body)। কিন্তু জ্যামিতির ভাষায় ইহাকে **ঘন** (solid) বলা হয়। ইটখানি কোন কঠিন পদার্থ দ্বারা নির্মিত বলিয়া ইহাকে ঘন বলা হয় না। ইহা যে কতকটা স্থান অধিকার করিয়া থাকে; ইহার ঐ ধর্মের জন্যই ইহাকে ঘন বলা হয়; এবং ইহা কঠিন ও নিরেট না হইয়া যদি কাগজের একটি ফাঁপা জিনিস হইত তাহা হইলেও

ইহাকে জ্যামিতির ভাষায় ঘন বলা হইত। সুতরাং জ্যামিতির ভাষায় একটি ফুটবল, একটি খালি বাক্স, একটি খালি কুঠরি, ইহাদের প্রত্যেকেই ঘন। কারণ, ইহাদের প্রত্যেকেই কিছু না কিছু স্থান অধিকার করিয়া থাকে অর্থাৎ ইহাদের প্রত্যেকেরই দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ (গভীরতা বা উচ্চতা) আছে। অতএব

সংজ্ঞা। যাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ আছে তাহাকেই **ঘন** বলে।

ঘন মাত্রেরই দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ এই তিনটি আছে বলিয়া উহাকে তিন আয়তন (dimensions) বিশিষ্ট বলা হয়।

তল

একখানি ইটের ছয়টি পার্শ্ব। এক একটি পার্শ্বকে তল বা পৃষ্ঠ বলা হয়। নদীর জলের উপরি ভাগ (অর্থাৎ যাহা জলকে উপরিস্থ বায়ু হইতে পৃথক করিতেছে তাহা) একটি তল। ইহা বায়ুও নহে, জলও নহে, অতএব ইহার বেধ নাই। কিন্তু ইহার দৈর্ঘ্যও আছে এবং প্রস্থ বা বিস্তারও আছে এই জন্য 'তল' দুই আয়তন বিশিষ্ট।

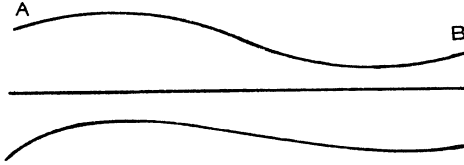
সংজ্ঞা। যাহার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ আছে কিন্তু বেধ নাই তাহাকে **তল** (Surface) বলে।

একখানি কাগজের দুই পৃষ্ঠ, দুইটি তল। কিন্তু কাগজখানি ঘন পদার্থ। ঘন মাত্রই এক বা একাধিক তলদ্বারা সীমাবদ্ধ। কিন্তু তল কোন ঘন পদার্থের অংশ নহে।

রেখা

একখানি সাদা কাগজের কতক অংশ কালি দিয়া চিত্রিত কর। যাহা এই কাল অংশকে অবশিষ্ট সাদা অংশ হইতে পৃথক করিতেছে তাহা **রেখা**। ইহা কালও নহে, সাদাও নহে। অতএব ইহার বিস্তার নাই। ইহা কাগজের পৃষ্ঠ বা তলের সহিত মিলিয়া রহিয়াছে; অতএব ইহার বেধ নাই। অথচ ইহার দৈর্ঘ্য আছে। এইজন্য রেখা এক আয়তন বিশিষ্ট।

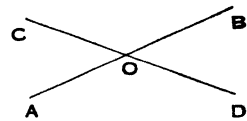
সংজ্ঞা। যাহার দৈর্ঘ্য আছে কিন্তু বিস্তার ও বেধ নাই তাহাকে **রেখা** (Line) বলে।

একটি পেনসিলের সরু অগ্রভাগ কাগজের উপর দিয়া টানিয়া নিলে যে দাগ বা চিহ্ন পড়ে তাহাকে রেখা বলা হয়। নিম্নের চিত্রে দাগ

তিনটি, তিনটি রেখা। কিন্তু এইরূপ রেখার বিস্তারও আছে, বেধও আছে। অতএব জ্যামিতির রেখার মত রেখা আঁকা অসম্ভব। অঙ্কিত রেখা যতই সরু হইবে, ইহা ততই জ্যামিতির রেখার অনুরূপ হইবে।

ইটখানার এক একটি ধার এক একটি রেখা। আবার দেখ, ইট-খানার প্রত্যেক ধারেই দুইটি তল মিলিত হইয়াছে। অতএব, দুইটি তল পরস্পর মিলিত হইলে রেখা উৎপন্ন হয়। এই কারণে, কাগজ ভাঁজ করিলে ভাঁজের দাগটি রেখা হয়। দুইটি অক্ষর দুই প্রান্তে বসাইয়া রেখার পরিচয় দেওয়া হয়। যেমন AB একটি রেখা।

বিন্দু

দুইটি রেখা পরস্পর ছেদ করিলে একটি বিন্দু উৎপন্ন হয়।

মনে কর, AB ও CD রেখা দুইটি পরস্পর ছেদ করিল। উহাদের মিলন স্থল O একটি বিন্দু। ইহা AB রেখার সহিত মিলিত হইয়া গিয়াছে ; অতএব ইহার বিস্তার ও বেধ নাই। ইহার দৈর্ঘ্য CD রেখার বিস্তারের সহিত মিলিয়া গিয়াছে। কিন্তু CD রেখার বিস্তার নাই। অতএব ঐ বিন্দুটির দৈর্ঘ্যও নাই। এই জন্য বিন্দু কোনও আয়তন বিশিষ্ট নহে। কিন্তু ঐ বিন্দুটি একটি স্থানে বসিয়া আছে অর্থাৎ ইহার অবস্থিতি আছে।

সংজ্ঞা। যাহার অবস্থিতি আছে, কিন্তু আয়তন (দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অথবা বেধ) নাই তাহাকে **বিন্দু** (Point) বলে।

একটি পেনসিলের সরু অগ্রভাগ কাগজের উপর ঈষৎ জোরে রাখিলে বিন্দু চিহ্ন পড়ে। যেমন পার্শ্বের A এর নিকটবর্তী চিহ্নটি।

.
A

বিন্দু যত ছোট হয় ততই ভাল। একটি মাত্র অক্ষর দ্বারা একটি বিন্দু নির্দেশ করা হয়। যেমন A বিন্দু বলিলে, A এর নিকটবর্তী যে বিন্দু তাহাকেই বুঝায়।

স্বতঃসিদ্ধ

গণিত শাস্ত্রের প্রত্যেক যুক্তিই অতি সহজ সত্যের উপর প্রতিষ্ঠিত। ঐ সত্যগুলি এত সহজ যে উহারা আপনা হইতেই প্রমাণিত হয়, উহাদের অন্য প্রমাণের আবশ্যক হয় না, এজন্য উহাদিগকে **স্বতঃসিদ্ধ** (স্বতঃ—আপনা হইতে, সিদ্ধ—প্রমাণিত) (Axiom) বলা হয়। নিম্নে কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধের উদাহরণ দেওয়া গেল।

১। যে সকল বস্তুর প্রত্যেকে কোনও এক বস্তুর সমান, তাহারা পরস্পর সমান।

২। সমান সমান বস্তুর সহিত সমান সমান বস্তু যোগ করিলে, যোগফলগুলিও পরস্পর সমান হয়।

৩। সমান সমান বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলিও পরস্পর সমান হয়।

৪। সমান সমান বস্তুর সমান সমান গুণ হইলে গুণফলগুলিও পরস্পর সমান হয়।

যেমন, সমান সমান বস্তুর দ্বিগুণ বস্তুগুলি পরস্পর সমান।

৫। সমান সমান বস্তু সমান সমান অংশে বিভক্ত করিলে উহাদের অংশগুলিও পরস্পর সমান হয়।

যেমন, সমান সমান বস্তুর অর্ধেক বস্তুগুলি পরস্পর সমান।

৬। যে কোন বস্তু তাহার অংশগুলির সমষ্টির সমান।

৭। কোনও বস্তু তাহার যে কোন অংশ হইতে বড়।

এই স্বতঃসিদ্ধগুলি **সর্বত্রই** ব্যবহার হইয়া থাকে, এই জন্য ইহাদিগকে **সাধারণ স্বতঃসিদ্ধ** বলা হয়। ইহা ব্যতীত জ্যামিতিতে ব্যবহৃত হয় এইরূপ কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ আছে, উহাদিগকে **জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধ** বলে। প্রয়োজন মত যথাস্থানে উহাদের উল্লেখ করা হইবে।

সরলরেখা—অঙ্কন ও মাপন

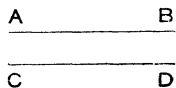
তোমরা দেখিয়াছ একটি পেনসিলের সরু অগ্রভাগ কাগজের উপর টানিলে রেখার আকৃতি পাওয়া যায়। পেনসিলের অগ্রভাগ একটি বিন্দু। অতএব বিন্দুর গতিতে রেখার উৎপত্তি হয়।

রেখা **দুই** প্রকার, যথা :—(১) **সরলরেখা** (Straight line) (২) **বক্ররেখা** (Curved line).

সংজ্ঞা। যে রেখা এক বিন্দু হইতে অপর কোনও বিন্দু পর্যন্ত দিক্ পরিবর্তন করে না তাহাকে **সরলরেখা** বলে।

এক টুক্‌রো কাগজ ভাঁজ করিলে, ভাঁজের যে দাগ পড়ে উহা একটি সরলরেখা। একখণ্ড সুতোর দুইপ্রান্ত ধরিয়া টানিলে যে আকার ধারণ করে তাহাই সরলরেখার আকার।

যে রেখা ক্রমাগত দিক্ পরিবর্তন করে তাহাকে **বক্ররেখা** বলে। একগাছি সুতোর দুইপ্রান্ত আলগা (বা ঢিলা) করিয়া ধরিলে বক্ররেখার আকৃতি পাওয়া যায়।

সমান সরলরেখা। দুইটি পেনসিলের দৈর্ঘ্য সমান কি না জানিতে হইলে তোমরা সাধারণত একটির উপর অন্যটি রাখিয়া দেখ যে, উহাদের একের দুইপ্রান্ত অন্যের দুইপ্রান্তের সহিত মিলিয়া যায় কি না, এবং মিলিয়া গেলেই দুইটিকে সমান বল। সেইরূপ মনে কর, AB, CD দুইটি সরলরেখা। এই রেখা দুইটি সমান কি না দেখিতে হইবে। মনে কর, CD রেখাটিকে তুলিয়া AB রেখার উপর এমনভাবে স্থাপন করা গেল, যেন উহার C বিন্দু A বিন্দুর উপর পড়িল এবং CD রেখা AB রেখার উপর পড়িল। এখন যদি

D বিন্দু B বিন্দুর উপর পড়ে, তবে রেখাদুইটি মিশিয়া যাইবে এবং উহারা সমান হইবে।

দুইটি সরলরেখার একটির উপর অন্যটি স্থাপন করিলে যদি একের দুই প্রান্ত অপরের দুই প্রান্তের সহিত মিলিয়া যায়, তবে উহাদিগকে **সমান সরলরেখা** (Equal straight lines) বলে।

একটি চিত্রকে এক স্থান হইতে তুলিয়া অপর কোন চিত্রের উপর, উহার আকারের পরিবর্তন না করিয়া, এরূপে স্থাপন করার মানসিক প্রক্রিয়ার নাম **উপরিপাত** (Superposition) **প্রক্রিয়া**।

ইহা হইতে নিম্নলিখিত জ্যামিতিক **স্বতঃসিদ্ধ** পাওয়া যায়ঃ

যদি একটি চিত্র অপর একটি চিত্রের উপর উপরিপাত করিলে সর্বতোভাবে মিলিয়া যায়, তবে চিত্র দুইটি পরস্পর সমান।

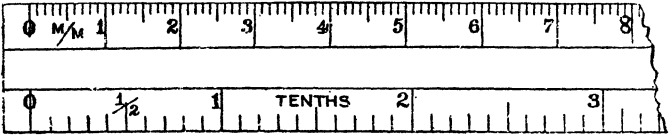
দ্বিখণ্ডন। দুই সমান অংশে বিভক্ত করার নাম দ্বিখণ্ডন।

মনে কর, AB একটি সরলরেখা এবং C একটি বিন্দু। C বিন্দুটি AB সরলরেখার A বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ AB রেখার উপর দিয়া B বিন্দুর দিকে চলিতেছে। সুতরাং AB রেখার AC অংশ

ক্রমশঃ বাড়িতেছে এবং BC অংশ কমিতেছে। এইরূপে চলিতে চলিতে C বিন্দুটি এমন একটি অবস্থানে আসিবে যে, তখন AC এবং CB অংশ দুইটি পরস্পর সমান হইবে। তখন ঐ C বিন্দুতে AB সরলরেখা দ্বিখণ্ডিত (Bisected) হইবে এবং C বিন্দু AB রেখার মধ্যবিন্দু (Middle point) হইবে। ইহা হইতে এই জ্যামিতিক **স্বতঃসিদ্ধ** পাওয়া যায় যে,

প্রত্যেক সীমা বিশিষ্ট সরল রেখারই একটি মধ্যবিন্দু আছে।

সরলরেখা অঙ্কন। সরলরেখা অঙ্কন ও তাহার পরিমাণ নির্ণয় করার যে যন্ত্র আছে তাহার নাম মাপনী (Ruler বা Scale)। ইহার

একপ্রান্ত ইঞ্চি ও তাহার দশাংশে এবং অপর প্রান্ত সেন্টিমিটর ও তাহার দশাংশ মিলিমিটরে বিভক্ত।

ইঞ্চি বুঝাইবার সাঙ্কেতিক চিহ্ন (″) এইরূপ : যেমন ১″=এক ইঞ্চি, ২·৪″=দুই দশমিক চার ইঞ্চি ইত্যাদি। আবার, ৫ সেঃ মিঃ= ৫ সেন্টিমিটর এবং ৩ মিঃ মিঃ=৩ মিলিমিটর।

মাপনীর প্রত্যেক ধারই একটি সরলরেখা। এইজন্য মাপনীর গায়ে গায়ে পেনসিলের সরু অগ্রভাগ টানিলেই একটি সরলরেখা উৎপন্ন হয়। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া সরলরেখা আঁকিতে হইলে উহাদের গায়ে মাপনী রাখিয়া মাপনীর গায়ে পেনসিলের সরু অগ্রভাগ টানিতে হয়। রেখা টানিবার পূর্বে পরীক্ষা করিয়া দেখিবে যে, উহা বিন্দু দুইটি দিয়া যায় কি না। সাধারণত বামদিক্ হইতে ডানদিকে রেখা টানিতে হয়।

"একটি বিন্দু হইতে অপর একটি বিন্দু পর্যন্ত সরলরেখা টানা"কে "বিন্দু দুইটি সংযুক্ত করা" বলে। "A বিন্দু ও B বিন্দু সংযুক্ত কর" ইহার পরিবর্তে আমরা "AB সংযুক্ত কর" বলিব।

দ্রষ্টব্য। একই রেখা দুইবার অঙ্কিত করিবে না।

উদাহরণ ১। একখানি কাগজের উপর দুইটি বিন্দু লও। মাপনীর সাহায্যে এই বিন্দু দুইটি সরলরেখা দ্বারা পাঁচবার সংযুক্ত কর। প্রত্যেক বারেই কি একটি নূতন সরলরেখা টানা হইয়াছে? বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে কয়টি সরলরেখা টানা হইয়াছে?

উদা ২। একটি সরলরেখা টান। ঐ রেখাকে ছেদ করিয়া অপর একটি সরলরেখা টান। রেখা দুইটি কতটি বিন্দুতে ছেদ করিল? অবশ্যই এক বিন্দুতে। মাপনীখানা রেখাটির উপর রাখিয়া, এমন কোন সরলরেখা টানিতে পার কি যাহাতে অঙ্কিত রেখা ঐ রেখাটিকে ইহার অধিক বিন্দুতে ছেদ করে?

উদা ৩। একখানি কাগজের উপর A, B দুইটি বিন্দু লও। A, B বিন্দু দুইটি সরল ও নানাবিধ বক্ররেখা দ্বারা সংযুক্ত কর। এখন একখণ্ড সুতো ঐ রেখাগুলির উপর রাখিয়া A হইতে B পর্যন্ত উহাদের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। এখন বল দেখি, কোন্ রেখাটির দৈর্ঘ্য সর্বাপেক্ষা কম?

যে ক্ষুদ্রতম রেখা দুই বিন্দুকে সংযুক্ত করে তাহাই সরলরেখা নয় কি?

উক্ত উদাহরণগুলি হইতে নিম্নলিখিত জ্যামিতিক **স্বতঃসিদ্ধ** পাওয়া যায়ঃ

১। দুইটি সরলরেখা একাধিক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিতে পারে না।

২। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্যে কেবল একটি সরলরেখা টানা যাইতে পারে।

৩। দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাই বিন্দুদ্বয়ের ক্ষুদ্রতম দূরত্ব।

ইহা হইতে **সরলরেখার** নিম্নলিখিত **ধর্মাবলী** পাওয়া যায়ঃ

১। দুইটি সরলরেখা দ্বারা কোনও স্থান পরিবেষ্টিত হইতে পারে না। কারণ, তাহা হইলে উহারা দুই বিন্দুতে ছেদ করিত।

২। কোন সরলরেখার প্রত্যেক অংশই সরলরেখা।

৩। কোনও সরলরেখার যে কোনও দুইটি বিন্দু জানিতে পারিলেই ঐ সরলরেখাটি সম্পূর্ণরূপে জানা যায়।

সরলরেখা মাপন: মাপনীর সাহায্যে সরলরেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যাইতে পারে এবং দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকিলে ঐ দৈর্ঘ্য পরিমাণ সরল-রেখা আঁকা যাইতে পারে।

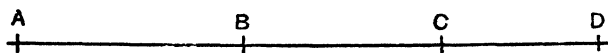
সাধারণত কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইলে কাঁটা কম্পাসের (১২ পৃষ্ঠা দেখ) কাঁটা দুটির অগ্রভাগ প্রদত্ত রেখার দুই প্রান্ত বিন্দুর উপর স্থাপন করিবে। তারপর কাঁটা দুটির মধ্যের ফাঁকের কোন পরিবর্তন না করিয়া মাপনীর গায়ে কাঁটা দুটির অগ্রভাগ রাখিয়া

রেখাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিবে। এবং নির্দিষ্ট পরিমাণ সরলরেখা আঁকিতে হইলে কাঁটা দুটির অগ্রভাগের দূরত্ব নির্দিষ্ট পরিমাণ লইয়া মাপনীর দ্বারা একটি সরলরেখা আঁকিয়া তাহা হইতে কম্পাসের সাহায্যে ঐ পরিমাণ অংশ ছেদ করিবে।

উদাহরণ ১। নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্য পরিমাণ সরলরেখা টান এবং উহাদের দৈর্ঘ্য সেন্টিমিটর ও মিলিমিটরে নির্ণয় কর।

৫″, ১·৫″, ২″, ২·৩″, ২·৭″, ৩″, ৪″, ৫·৬″ এবং ৭·২″.

এখন বলত, ১″ = কত সেন্টিমিটর?

উদা ২। নিম্নের সরলরেখাটির AB, BC, এবং CD অংশত্রয়ের দৈর্ঘ্য (১) ইঞ্চি ও ইঞ্চির দশাংশে (২) সেন্টিমিটর ও মিলিমিটরে নির্ণয় কর। দৈর্ঘ্যগুলি যোগ করিয়া ADর দৈর্ঘ্য স্থির কর। মাপিয়া দেখ ADর দৈর্ঘ্য ঠিক হইয়াছে কি না।

উদা ৩। নিম্নের সরলরেখাটির AB, AP, QB অংশত্রয়ের দৈর্ঘ্য (১) ইঞ্চি ও ইঞ্চির দশাংশে এবং (২) সেন্টিমিটর ও মিলিমিটরে নির্ণয় কর। এখন না মাপিয়া PQ এর দূরত্ব স্থির কর; মাপিয়া দেখ PQ এর দূরত্ব ঠিক হইল কি না।

উদা ৪। পাঁচ ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের একটি সরলরেখা টানিয়া মাপনীর সাহায্যে উহার এক প্রান্ত হইতে ২½″ কাটিয়া লও। অপর প্রান্ত হইতে ছেদবিন্দু কত মাপিয়া দেখ। ছেদবিন্দু রেখার ঠিক মধ্যবিন্দু কি?

উদা ৫। তিন সেন্টিমিটর পরিমাণ একটি সরলরেখা টানিয়া মাপনীর সাহায্যে উহার উভয় প্রান্ত হইতে এক সেন্টিমিটর করিয়া কাটিয়া লও। ছেদবিন্দু দুইটির মধ্যের দূরত্ব কত? ছেদবিন্দু দুইটি রেখাটিকে তিন সমান অংশে বিভক্ত করিল কি?

সামতলিক ক্ষেত্র

যে তলের কোনও দুই বিন্দু একটি সরলরেখা দ্বারা সংযুক্ত করিলে, সরলরেখাটির সর্বাংশ ঐ তলে সংলগ্ন হইয়া যায়, তাহাকে **সমতল** (Plane Surface) বলে। যথা, স্থির জলরাশির উপরিভাগ একটি সমতল।

মন্তব্য। সমতলের কোনও স্থানে হাত দিলে উচু নীচু বোধ হইবে না। জ্যামিতিক সমতলের অস্তিত্ব পৃথিবীতে নাই। বাক্সের অথবা টেবিলের উপরিভাগকে সমতল মনে করা যাইতে পারে।

কোনও সীমাবদ্ধ স্থানকে **ক্ষেত্র** (Figure) বলে।

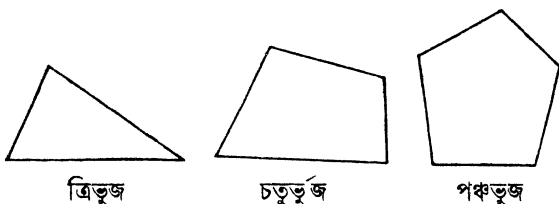
সমতলের কোনও অংশ এক বা ততোধিক রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে তাহাকে **সামতলিক ক্ষেত্র** (Plane figure) বলে।

ক্ষেত্রের সীমানার রেখাগুলির দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে **পরিসীমা** (Perimeter) বলে।

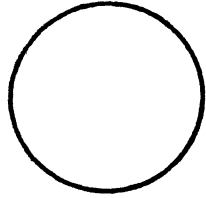
কোনও ক্ষেত্র যে পরিমাণ স্থান অধিকার করিয়া থাকে তাহাকে ঐ ক্ষেত্রের **ক্ষেত্রফল** বা **কালি** (Area) বলে।

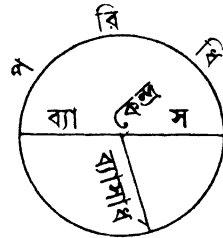
যে সামতলিক ক্ষেত্র সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ হয়, তাহাকে **ঋজুরেখ ক্ষেত্র** (Rectilineal figure) বলে ; এবং ঐ সরলরেখা গুলিকে উহার **ভুজ** বা **বাহু** (Side) বলে।

যে ক্ষেত্র তিনটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ তাহাকে **ত্রিভুজ** (Triangle) বলে। সেইরূপ, যে ক্ষেত্র চারিটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ তাহাকে **চতুর্ভুজ** (Quadrilateral), যে ক্ষেত্র পাঁচটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ তাহাকে **পঞ্চভুজ** (Pentagon) বলে। এইরূপে কোনও

ত্রিভুজ চতুর্ভুজ পঞ্চভুজ

ঋজুরেখ ক্ষেত্রের ভুজের সংখ্যা অনুসারে উহার নাম করা হইয়া থাকে

বৃত্ত

মনে কর, একখণ্ড সূতোর এক প্রান্তে একটি পিন ও অপর প্রান্তে একটি পেনসিলের সরু অগ্রভাগ বাঁধা আছে; এক্ষণে একখানা মসৃণ টেবিলের উপর একখানা কাগজ রাখিয়া ঐ পিনটি উহাতে বিদ্ধ কর এবং সুতোটি টান করিয়া রাখিয়া উহার অপর প্রান্তের পেনসিলের অগ্রভাগ কাগজের উপর একবার ঘুরাইয়া লও; দেখিবে, পার্শ্বের চিত্রের ন্যায় একটি চিত্র হইবে। ইহার নাম **বৃত্ত**। ইহা হইতে তোমরা দেখিতেছ যে, একটি বিন্দু অপর একটি বিন্দুর চতুর্দিকে উহাদের মধ্যের দূরত্বের কোনও পরিবর্তন না করিয়া একই সমতলে একবার ঘুরিয়া আসিলে একটি বৃত্ত উৎপন্ন হয়।

সংজ্ঞা। যদি কোন সামতলিক ক্ষেত্র একটি বক্ররেখা দ্বারা এরূপে সীমাবদ্ধ হয় যে, ঐ ক্ষেত্রের অন্তঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সীমা পর্যন্ত যতগুলি সরলরেখা টানা যায়, তাহারা পরস্পর সমান, তবে ঐ ক্ষেত্রকে **বৃত্ত** (Circle) বলে।

যে বক্ররেখা বৃত্তকে সীমাবদ্ধ করে, তাহাকে বৃত্তের **পরিধি** (Circumference) বলে।

বৃত্তের অন্তঃস্থ যে নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত সরলরেখা

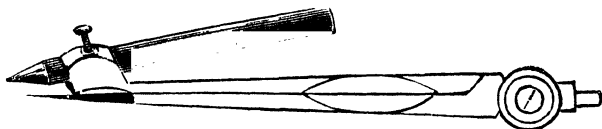
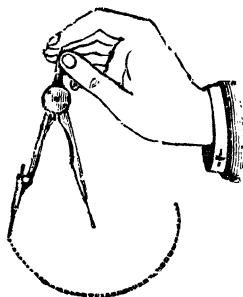
টানিলে সকল রেখাগুলিই পরস্পর সমান হয়, সেই বিন্দুকে ঐ বৃত্তের **কেন্দ্র** (Centre) বলে।

বৃত্তের কেন্দ্র ভেদ করিয়া দুই দিকে পরিধি পর্যন্ত যে সরলরেখা টানা যায়, তাহাকে **ব্যাস** (Diameter) বলে।

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত যে কোন সরলরেখাকে বৃত্তের **ব্যাসার্ধ** বা **অর** (Radius) বলে।

বৃত্তের পরিধির যে কোনও অংশকে **চাপ** (Arc) বলে।

বৃত্ত অঙ্কন, কম্পাস

বৃত্ত অঙ্কিত করিবার যন্ত্রের নাম কম্পাস বা পেনসিল কম্পাস—নিম্নে ইহার প্রতিকৃতি দেওয়া গেল।

পেনসিল কম্পাসের দুইটি ধাতুনির্মিত কাঁটা বা বাহু আছে। একটি কাঁটার অগ্রভাগ সূচের অগ্রভাগের ন্যায় সরু ; আর একটি কাঁটায় পেনসিল বসাইবার ব্যবস্থা আছে। কাঁটা দুইটির স্থূল প্রান্তদ্বয় একটি খিল দ্বারা আঁটা থাকে। যে কম্পাসের দুটি কাঁটার অগ্রভাগই সূচের অগ্রভাগের ন্যায় সরু তাহার নাম কাঁটা কম্পাস বা ডিভাইডার (Divider).

বৃত্ত অঙ্কন। বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইলে কম্পাসের সূচ্যগ্রতুল্য বিন্দুটি কাগজের কোনও এক বিন্দুতে সর্বদা সংলগ্ন রাখিয়া কম্পাসের পেনসিলের অগ্রভাগ কোনও সমতলে অবস্থিত কাগজের উপর দিয়া পার্শ্বপ্রদর্শিত প্রণালীতে এরূপভাবে ঘুরাইবে যেন কম্পাসের দুই কাঁটার অগ্রভাগের দূরত্ব সর্বদাই সমান থাকে।

দ্রষ্টব্য। বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ দেওয়া থাকিলেই বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

উদাহরণ ১। একটি বিন্দু (A) বসাও। ঐ বিন্দু হইতে এক ইঞ্চি দূরে পাঁচটি বিন্দু লও। Aকে কেন্দ্র করিয়া এক ইঞ্চি ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। এখন ঐ বিন্দুগুলি কোথায় আছে ?

পরিধিতে পড়ে না অথচ A বিন্দু হইতে এক ইঞ্চি দূরে অবস্থিত এমন কোন বিন্দু দেখাইতে বা লইতে পার কি ?

উদা ২। পরস্পর হইতে ৩″ দূরে A ও B দুইটি বিন্দু লও।

(১) Aকে কেন্দ্র করিয়া ১″ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। এবং Bকে কেন্দ্র করিয়া ১·৫″ ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি বৃত্ত আঁক ; বৃত্ত দুইটি পরস্পর ছেদ করিল কি ? কেন করিল না ?

(২) Aকে কেন্দ্র করিয়া ১″ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত এবং Bকে কেন্দ্র করিয়া ২·৫″ ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি বৃত্ত আঁক। বৃত্ত দুইটি পরস্পর ছেদ করিল কি ? কেন করিল ? কত বিন্দুতে ছেদ করিল ?

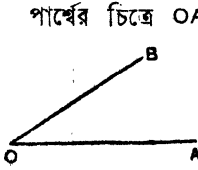
(৩) Aকে কেন্দ্র করিয়া ১″ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক এবং Bকে কেন্দ্র করিয়া ২″ ব্যাসার্ধ লইয়া অন্য একটি বৃত্ত আঁক। বৃত্ত দুইটি পরস্পর ছেদ করিল, না স্পর্শ করিল ? কোথায় স্পর্শ করিল ? এইরূপ হইবার কারণ কি ?

উদা ৩। একটি বিন্দু বসাও এবং উহাকে A চিহ্নিত কর। Bকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে ১, ২ ও ১·৫ সেণ্টিমিটর ব্যাসার্ধ লইয়া তিনটি বৃত্ত আঁক।

বৃত্ত তিনটির একটি অন্য কোনটিকে ছেদ করিল কি ? কেন করিল না ? এক বৃত্ত অপর বৃত্ত হইতে কখন বড় কিংবা ছোট হয় ? কখনই বা দুইটি বৃত্ত সমান হইতে পারে ? একই বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একই পরিমাণ ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি পৃথক্ বৃত্ত আঁকিতে পার কি ?

উদা ৪। একটি বৃত্ত আঁক। ঐ বৃত্তকে ছেদ করিয়া অপর একটি বৃত্ত আঁক। বৃত্ত দুইটি পরস্পর কতগুলি বিন্দুতে ছেদ করিল ? ঐ বৃত্তকে দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করে এমন কোন বৃত্ত আঁকিতে পার কি ? চেষ্টা করিয়া দেখ।

কোণ

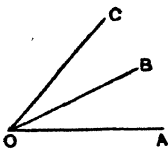
দুইটি সরলরেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে একটি **কোণ** (Angle) উৎপন্ন হয়।

পার্শ্বের চিত্রে OA সরলরেখা OB সরলরেখার সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইয়া O বিন্দুতে একটি কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। টেবিল কিংবা বেঞ্চির দুইধার যেখানে মিলিত হয় তাহা একটি কোণ। আমরা প্রচলিত কথায়ও ঐরূপ কোণের উল্লেখ করিয়া থাকি।

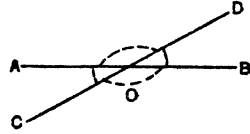
যে বিন্দুতে কোণ উৎপন্ন হয় তাহাকে **শীর্ষ** (Vertex) বলে। চিত্রে, O বিন্দু ঐ কোণের শীর্ষ।

তিনটি অক্ষর দ্বারা একটি কোণের নাম করা হইয়া থাকে। যেমন, উপরের চিত্রে AOB অথবা BOA একটি কোণ। কোণের নামের অক্ষর তিনটিতে শীর্ষসূচক অক্ষরটি মধ্যে রাখিতে হয়। O বিন্দুতে কেবল একটি কোণ আছে বলিয়া 'O কোণ' বলিলে এই AOB কোণটিই বুঝাইবে। অতএব, এক বিন্দুতে একটি কোণ থাকিলে, যে অক্ষরটি দ্বারা ঐ বিন্দু বুঝায়, সেই অক্ষরটি দ্বারাই ঐ কোণও ব্যক্ত করা যাইতে পারে।

$\angle$ এই চিহ্ন কোণ জ্ঞাপক সাঙ্কেতিক চিহ্ন। যেমন $\angle$AOB দ্বারা AOB কোণ বুঝায়।

সংজ্ঞা। যে দুইটি সরলরেখা মিলিত হইয়া কোণ উৎপন্ন করে তাহাদিগকে কোণের **বাহু** (Arms) বলা হয়। OA এবং OB সরলরেখা AOB কোণের বাহু।

সংজ্ঞা। একটি সাধারণ বাহুর দুই পার্শ্বে একই শীর্ষে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদিগকে **সন্নিহিত কোণ** (Adjacent Angles) বলা হয়।

পার্শ্বের চিত্রে AOB ও BOC কোণ দুইটির মধ্যে OB বাহু সাধারণ এবং ইহাদের একই শীর্ষ (O), সুতরাং AOB ও BOC কোণ সন্নিহিত কোণ।

সংজ্ঞা। দুইটি সরল রেখা পরস্পর একটি বিন্দুতে ছেদ করিলে ছেদবিন্দুর বিপরীত দিকে অবস্থিত দুইটি কোণকে **বিপ্রতীপ কোণ** (Vertically Opposite Angles) বলা হয়।

পার্শ্বের চিত্রে AOC, BOD কোণ বিপ্রতীপ কোণ। COB ও AOD কোণ দুইটিও বিপ্রতীপ কোণ।

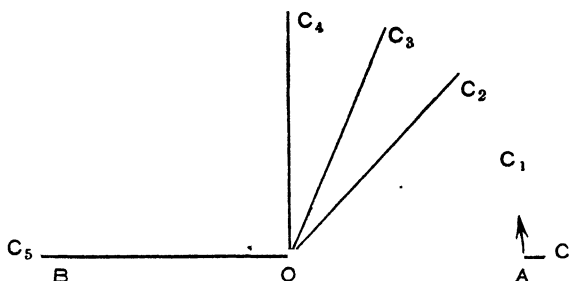
সমান কোণ। মনে কর, AOB ও XPY দুটি কোণ। আরও

মনে কর, যেন AOB কোণটি তুলিয়া XPY কোণের উপর উহার আকারের কোন পরিবর্তন না করিয়া এরূপে রাখা গেল, যেন O বিন্দু P বিন্দুর উপর এবং OA বাহু PX বাহুর উপর পড়িল ; এখন, OB বাহু PY বাহুর উপর পড়িলে AOB কোণ XPY কোণের সহিত মিশিয়া যাইবে এবং উহারা পরস্পর সমান হইবে।

দুই কোণের সমানতা পরীক্ষা করিবার ঐ প্রক্রিয়াকে **উপরিপাত প্রক্রিয়া** বলে।

সংজ্ঞা। একটি কোণ অপর এক কোণের উপর উপরিপাত করিলে যদি একের শীর্ষ ও বাহুদ্বয় যথাক্রমে অপরের শীর্ষ ও বাহুদ্বয়ের সহিত মিলিয়া যায়, তবে তাহাদিগকে **সমান কোণ** (Equal angles) বলে।

কোণের পরিমাণ। মনে কর, OC সরলরেখা AOB সরলরেখার O বিন্দুর চতুর্দিকে ঘড়ির কাঁটার ন্যায় (ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে তাহার বিপরীত দিকে) একই সমতলে ঘুরিতেছে। OC রেখা ঘুরিবার পূর্বে OA রেখার সঙ্গে মিলিত ছিল। পরে OC রেখা ঘুরিতে ঘুরিতে ক্রমান্বয়ে OC_1, OC_2, OC_3 রেখার সঙ্গে মিলিত হইয়া AOC_1, AOC_2 এবং

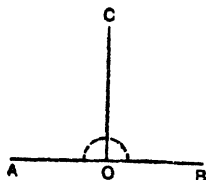
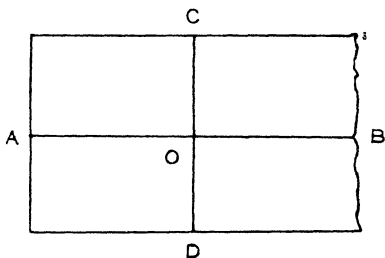
AOC_3 এই তিনটি কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। এখানে দেখ, OA এবং OC_3 এই দুই বাহুর মধ্যের ফাঁক, OA এবং OC_2 এই দুই বাহুর মধ্যের

ফাঁক হইতে বেশি। এবং OA ও OC_1 এই দুই বাহুর মধ্যের ফাঁক, OA ও OC_2 এই বাহু দুইটির মধ্যের ফাঁক হইতে কম। ইহাকেই প্রচলিত কথায় বলা হয় AOC_3 কোণ AOC_2 কোণ অপেক্ষা বড় এবং AOC_1 কোণ AOC_2 কোণ অপেক্ষা ছোট।

ইহা হইতে দেখিতেছ যে, কোণের দুই বাহুর মধ্যের ফাঁক বেশি কিংবা কমের উপর কোণ বড় কিংবা ছোট হওয়া নির্ভর করে। কোণের বাহু বড় কিংবা ছোটর উপর কোণের পরিমাণ (বড়, ছোট) নির্ভর করে না। কারণ, উপরের চিত্রে OA ও OC_1 রেখা দুটি আরও বড় বা ছোট লইলে রেখা দুটির মধ্যের ফাঁক বেশি বা কম হইবে না।

আবার মনে কর, OC রেখা ঘুরিতে ঘুরিতে এমন এক রেখার (চিত্রে OC_4) সঙ্গে মিলিত হইল যেন, AOC_4 কোণ BOC_4 কোণের সমান হইল। তাহা হইলে, AOC_4 এবং BOC_4 কোণের প্রত্যেকটিকে এক **সমকোণ** বলা হয়।

সংজ্ঞা। একটি সরলরেখা অপর এক সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে, যে দুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়, যদি তাহারা পরস্পর সমান হয়, তবে উহাদের প্রত্যেকটিকে **সমকোণ** (Right angle) বলা হয় এবং ঐ সরলরেখা দুটির একটিকে অপরটির **লম্ব** (Perpendicular) বলা হয়।

পার্শ্বের চিত্রে, OC সরলরেখা AB সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান হইয়া পাশাপাশি AOC ও BOC এই দুটি পরস্পর সমান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। AOC ও BOC কোণের প্রত্যেকেই একটি সমকোণ, এবং OC, ABর লম্ব, আবার AB, OCর লম্ব।

C A O B

একখানি কাগজ ভাঁজ কর। ভাঁজ না খুলিয়া আবার কাগজখানি এমন ভাবে ভাঁজ কর যেন পূর্বের ভাঁজ করা প্রান্তের এক অংশ অপর অংশের সঙ্গে মিলিয়া যায়। এখন ভাঁজ খোল, তাহা হইলে সমকোণ ও লম্বের আকৃতি দেখিতে পাইবে। চিত্রে কাগজখানি ভাঁজ খোলা অবস্থায় আছে। AB ও CD রেখা ভাঁজের দাগ এবং O ছেদবিন্দু। AB এবং CD রেখা একটি অপরটির লম্ব এবং AOD, DOB, BOC, COA কোণের প্রত্যেকেই একটি সমকোণ।

C A B O D

ইহা হইতে নিম্নলিখিত জ্যামিতিক **স্বতঃসিদ্ধ**গুলি পাওয়া যায়:

১। **সকল সমকোণই পরস্পর সমান।**

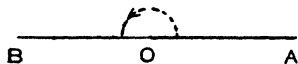
২। **একটি সরলরেখার কোনও নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর একটি মাত্র লম্ব আছে।**

এক সমকোণকে ৯০ সমান অংশে বিভক্ত করিলে প্রত্যেক অংশকে এক **ডিগ্রী** (Degree) বলে। অতএব, এক সমকোণের পরিমাণ ৯০ ডিগ্রী; ৯০ ডিগ্রী ৯০° এইরূপে লিখিতে হয়।

১৬ পৃষ্ঠার চিত্রে আবার মনে কর, OC রেখা ঘুরিতে ঘুরিতে AOB রেখার OB অংশের সহিত মিলিত হইয়া AO সরলরেখার সহিত একই

সরলরেখা হইল, এবং AOC_5 বা AOB কোণ উৎপন্ন করিল। এই AOB কোণকে একটি **সরলকোণ** (Straight Angle) বলা হয়।

সংজ্ঞা। যে কোণের বাহু দুটি একই সরলরেখায় শীর্ষের বিপরীত দিকে অবস্থিত তাহাকে **সরলকোণ** বলে।

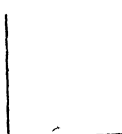
B O A

অতএব, একটি সরলকোণের পরিমাণ দুই সমকোণের সমান বা ১৮০°।

মন্তব্য। এইরূপে ঘুরিতে ঘুরিতে OC একবার সম্পূর্ণ ঘুরিয়া পুনঃ OAর সঙ্গে মিলিত হইলে যে কোণ উৎপন্ন হয় তাহার পরিমাণ চারি সমকোণের সমান বা ৩৬০°।

সংজ্ঞা। এক সমকোণ অপেক্ষা ছোট কোণকে **সূক্ষ্মকোণ** (Acute Angle) বলে।

মন্তব্য। একটি সূক্ষ্মকোণের পরিমাণ ৯০°র কম।

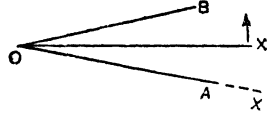
সংজ্ঞা। এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর অথচ দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণকে **স্থূলকোণ** (Obtuse Angle) বলে।

মন্তব্য। একটি স্থূলকোণের পরিমাণ ৯০°র বেশি কিন্তু ১৮০°র কম।

সূক্ষ্মকোণ সমকোণ স্থূলকোণ

সংজ্ঞা। যে কোণ দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু চারি সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর তাহাকে **প্রবৃদ্ধ কোণ** (Reflex angle) বলে।

মন্তব্য। একটি প্রবৃদ্ধ কোণের পরিমাণ ১৮০°র বেশি কিন্তু ৩৬০°র কম।

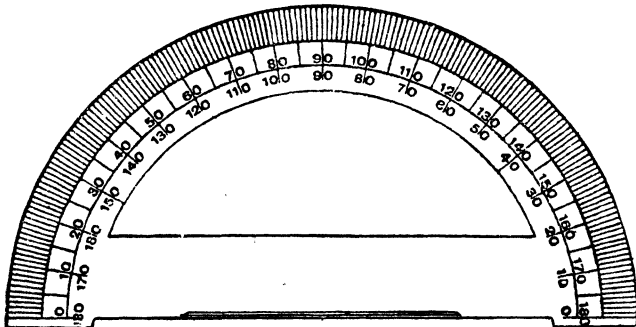
দ্রষ্টব্য। ১ ডিগ্রী = ৬০ মিনিট (৬০′)
১ মিনিট = ৬০ সেকেণ্ড (৬০″)

দ্বিখণ্ডক। মনে কর, OX একটি সরলরেখা, ইহা O বিন্দুর চতুর্দিকে ঘুরিতেছে। ঘুরিবার পূর্বে OX, AOB কোণের OA বাহুর সঙ্গে মিলিত ছিল। এক্ষণে OX ক্রমশঃ যতই OBর দিকে ঘুরিতেছে AOX কোণের পরিমাণ ততই বাড়িতেছে এবং BOX কোণের পরিমাণ ততই কমিতেছে। এইরূপে ঘুরিতে ঘুরিতে OX এমন একটি অবস্থানে আসিবে যে, তখন AOX কোণ, BOX কোণের সমান হইবে, অর্থাৎ OX, AOBকোণকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

সংজ্ঞা। যে সরলরেখা একটি কোণকে সমান দুই অংশে বিভক্ত করে তাহাকে ঐ কোণের **দ্বিখণ্ডক** (Bisector) বলে।

ইহা হইতে জ্যামিতিক এই **স্বতঃসিদ্ধ** পাওয়া যায় যে,

প্রত্যেক কোণেরই একটি দ্বিখণ্ডক আছে।

কোণ মাপন ও অঙ্কন, প্রোট্রাক্টর

নিম্নে যে অর্ধবৃত্তাকার যন্ত্রের চিত্র দেখিতেছ উহার নাম প্রোট্রাক্টর (Protractor) বা কোণমান যন্ত্র। ইহার কেন্দ্রে একটি চিহ্ন থাকে।

ইহার পরিধিকে ১৮০ সমান অংশে বিভক্ত করিয়া দাগ কাটা আছে,

এবং ব্যবহারের সুবিধার জন্য উভয় প্রান্ত হইতেই দাগ চিহ্নগুলির সংখ্যা নির্দেশ করা আছে।

কোন প্রদত্ত কোণের পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইলে, কোণমান যন্ত্রটি এইরূপে স্থাপন করিবে যেন উহার কেন্দ্র ও ব্যাস যথাক্রমে ঐ কোণের শীর্ষ এবং একটি বাহুর সঙ্গে মিলিয়া যায়। এখন কোণের অপর বাহুর উপর পরিধির যে দাগ আছে তাহার সংখ্যা দেখিয়া কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণ অঙ্কন। মনে কর, A বিন্দুতে AB সরলরেখার সহিত একটি ৩৪° কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে। কোণমান যন্ত্রটি এরূপভাবে রাখ যেন ইহার কেন্দ্র A বিন্দুর সহিত এবং ইহার ব্যাস AB রেখার সহিত মিলিয়া যায়। এখন পরিধির ৩৪° দাগের ঠিক নীচে কাগজে একটি বিন্দু C লও। AC সংযুক্ত করিলেই BAC, ৩৪° কোণ পাইবে।

উদাহরণ ১। একখানা কাগজে ইচ্ছামত পাঁচটি কোণ আঁকিয়া কোণমান যন্ত্রের সাহায্যে উহাদের পরিমাণ নির্ণয় কর।

উদা ২। নিম্নলিখিত পরিমাণ বিশিষ্ট কোণগুলি অঙ্কিত কর:
৩৭°, ৫১°, ৬৩°, ৭৯°, ৯০°, ১৩৫°, ১৮০°.

পরীক্ষার্থ প্রশ্নমালা

১। ঘন, তল, রেখা এবং বিন্দু কাহাকে বলে? উহাদের পরস্পরের মধ্যে কি সম্বন্ধ আছে?

২। দুটি সরলরেখা পরস্পর একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না, ইহা দেখাও।

৩। দুটি রেখা দ্বারা কোন স্থান সীমাবদ্ধ হইতে পারে কি? কখন পারে না?

৪। দুটি বিন্দু সংযুক্ত করিয়া কয়টি সরলরেখা টানা যাইতে পারে?

৫। কোন একটি রেখা সরল কি না তাহা কি করিয়া জানা যায়?
(কোন সরলরেখার উপর উপরিপাত করিয়া।)

৬। কোন সীমাবদ্ধ সরলরেখার কয়টি মধ্য বিন্দু আছে ?

৭। সমতল কাহাকে বলে ? কোন তল সমতল কি না কি করিয়া জানা যায় ?

৮। কোনও কোণের পরিমাণ কাহার উপর নির্ভর করে ? উহার বাহুর দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভর করে কি ?

৯। সন্নিহিত কোণ ও সরল কোণ কাহাকে বলে ? ঐরূপ ত্নটি কোণ আঁকিয়া দেখাও।

১০। প্রত্যেক কোণেরই একটি দ্বিখণ্ডক আছে, ইহা দ্বিখণ্ডকটি না টানিয়া প্রমাণ করিতে পার কি ? একটি কোণের কয়টি দ্বিখণ্ডক আছে ?

১১। সমান কোণ কাহাকে বলে ? ত্নটি কোণ দেওয়া থাকিলে উহারা সমান কি না কি করিয়া পরীক্ষা করিবে ?

১২। সমান সরলরেখা কাহাকে বলে ? কোনও ত্নটি সরলরেখা সমান কি না কি করিয়া জানা যায় ?

১৩। সমকোণ কাহাকে বলে ? প্রত্যেক সমকোণই পরস্পর সমান, ইহা প্রমাণ কর।

১৪। সামতলিক ক্ষেত্র কাহাকে বলে ? একটি কোণ সামতলিক ক্ষেত্র নয় কেন ?

১৫। একটি মাত্র রেখা দ্বারা কোন্ ক্ষেত্র সীমাবদ্ধ হইতে পারে ? ঐরূপ একটি ক্ষেত্র আঁকিতে পার কি ? কি করিয়া আঁকিতে হয় ?

১৬। ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, পঞ্চভুজ কাহাকে বলে ? একটি পঞ্চভুজ আঁকিয়া দেখাও।

১৭। ত্নটি বৃত্ত কখন পরস্পর ছেদ করিতে পারে ? কখনই বা স্পর্শ করে ? ছেদ করিলে উহারা কয়টি বিন্দুতে ছেদ করে ?

১৮। স্বতঃসিদ্ধ কাহাকে বলে ? সমকোণের সংজ্ঞা হইতে জ্যামিতিক কোন্ স্বতঃসিদ্ধ পাওয়া যায়।

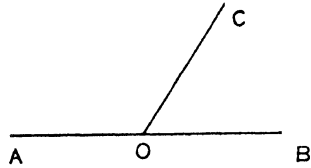
১৯। যে কোনও ত্নটি জ্যামিতিক চিত্র সমান কি না কি করিয়া জানা যায় ?

২০। উপরিপাত প্রক্রিয়া কাহাকে বলে ? ইহা হইতে জ্যামিতিক কোন স্বতঃসিদ্ধ পাওয়া যায় ?

প্রথম অধ্যায়

ব্যবহারিক জ্যামিতির নানাবিধ অঙ্কন ও পরীক্ষা দ্বারা জ্যামিতিক সত্যের উপলব্ধি

রেখা ও কোণ

উদাহরণ ১। AB একটি সরলরেখা টান ; এই রেখার মধ্যে যে কোনও একটি O বিন্দু লও। এই বিন্দু হইতে ইচ্ছামত যে কোনও OC সরলরেখা টান। এখন কয়টি কোণ উৎপন্ন হইয়াছে ? অবশ্যই ছুটি ($\angle$AOC ও $\angle$BOC)। কোণমান যন্ত্র দ্বারা AOC কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। কোণমান যন্ত্রটি না তুলিয়াই BOC কোণের পরিমাণ কত ডিগ্রী বল। এই ছুটি কোণের সমষ্টি কত ?

O বিন্দু হইতে ভিন্ন ভিন্ন দিকে OC রেখা টানিয়া AOC ও BOC কোণদ্বয়ের সমষ্টির পরিমাণ পরীক্ষা করিয়া দেখ।

স্পষ্টই, AOC এবং BOC কোণের সমষ্টি ১৮০°। কারণ, OC যে অবস্থানেই থাকুক না কেন, কোণমান যন্ত্রের সাহায্যে AOC এবং BOC কোণের সমষ্টি AOB সরল কোণের সমান দেখা যায়।

অতএব ইহা হইতে অনুমান করা যাইতে পারে যে,

এক সরলরেখার উপর অন্য এক সরলরেখা দণ্ডায়মান হইলে যে ছুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা একত্রযোগে ছুই সমকোণের সমান।

সংজ্ঞা। ছুটি কোণের সমষ্টির পরিমাণ ১৮০° হইলে উহাদের একটিকে অপরটির **সম্পূরক** (Supplementary) বলে।

উদাহরণ ২। প্রথম উদাহরণের চিত্রে,

(১) ∠AOC, ৫৭° হইলে ∠BOC = কত ডিগ্রী ?
(২) ∠BOC, ১০৫° „ ∠AOC = „ „
(৩) ∠AOC, ৯৯° „ ∠BOC = „ „

উদা ৩। একটি O বিন্দু লও। O বিন্দু হইতে বিভিন্ন দিকে কতকগুলি সরলরেখা টান। এইরূপে যতগুলি কোণ উৎপন্ন হইল, কোণমান যন্ত্রদ্বারা তাহাদের পরিমাণ পৃথক্ পৃথক্ নির্ণয় কর। এই কোণগুলির সমষ্টির পরিমাণ কত ?

উদা ৪। তৃতীয় উদাহরণের, O বিন্দুর মধ্য দিয়া যে কোনও AOB সরলরেখা টান। এখন কোণমান যন্ত্রের ব্যাস AOB রেখার উপর এমনভাবে রাখ যেন উহার কেন্দ্র O বিন্দুর উপর থাকে। এখন বল দেখি AOB রেখার এক পার্শ্বে O বিন্দুতে যতগুলি কোণ আছে তাহাদের সমষ্টির পরিমাণ কত ? স্পষ্টই ১৮০° (কেন ?) কোণমান যন্ত্রটি ঠিক ঐরূপে AOB রেখার অপর পার্শ্বে রাখিয়া বল দেখি, AOB রেখার অপর পার্শ্বে O বিন্দুতে যতগুলি কোণ আছে তাহাদের সমষ্টির পরিমাণ কত ? স্পষ্টই ১৮০°।

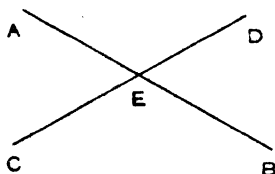
এখন বল দেখি, O বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলির সমষ্টির পরিমাণ কত ?

উদা ৫। OC একটি সরলরেখা টান, O হইতে OC সরলরেখার দুই পার্শ্বে OA, OB দুটি সরল রেখা এরূপ ভাবে টান যেন AOC, BOC কোণ দুটির পরিমাণ একত্র যোগে ১৮০° হয়। OA এবং OB রেখা দুটি একই সরলরেখা কি না মাপনী দ্বারা পরীক্ষা করিয়া দেখ।

উদা ৬। পঞ্চম উদাহরণে (প্রথম উদাহরণের চিত্র দেখ)।

(১) ∠AOC = ৬৭°, ∠BOC = ১১৩° ;
(২) ∠BOC = ১২০°, ∠AOC = ৬০° ;
(৩) ∠AOC = ৮৯°, ∠BOC = ৯১°

হইলে, OA, OB একই সরল রেখা হয় কি না দেখ। না হইলে কি অবস্থায় উহারা এক সরলরেখা হইতে পারে ? তোমারা ইহা হইতে কি সিদ্ধান্তে পৌছিলে তাহা লিখ।

উদা ৭। AB, CD দুটি সরলরেখা টান যেন তাহারা পরস্পর ছেদ করে। ছেদবিন্দু E চিহ্নিত কর। কোণমান যন্ত্রের সাহায্যে (কোণমান যন্ত্রের ব্যাস AB রেখার সহিত মিলাইয়া) BED কোণের পরিমাণ কত ডিগ্রী দেখ। কোণমান যন্ত্র না তুলিয়াই AED কোণের পরিমাণ কত বল। আবার, কোণমান যন্ত্রের ব্যাস CD রেখার সহিত মিলাইয়া, BED কোণের পরিমাণ কত ডিগ্রী দেখ, কোণমান যন্ত্র না তুলিয়াই BEC কোণের পরিমাণ কত বল।

এখন বলত, AED ও CEB বিপ্রতীপ কোন দুটি সমান কি ?

AEC কোণটি মাপিয়া দেখ উহা BED কোণের সমান কি না ?

উদা ৮। দুটি সরলরেখা টানিয়া বিপ্রতীপ কোণগুলি কাটিয়া লও। একটির উপর অপরটি রাখিয়া পরীক্ষা করিয়া দেখ উহারা পরস্পর সমান কি না।

সপ্তম ও অষ্টম উদাহরণ হইতে দেখা যায় যে,

দুটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে বিপ্রতীপ কোণগুলি সমান হয়।

দ্রষ্টব্য। সপ্তম উদাহরণের চিত্রে আবার দেখ. AED ও BEC কোণের প্রত্যেকেই BED কোণের সম্পূরক। (কেন ?) কিন্তু $\angle$AED ও $\angle$BEC পরস্পর সমান, সুতরাং দেখিতেছ,

একই কোণের সম্পূরক কোণগুলিও পরস্পর সমান।

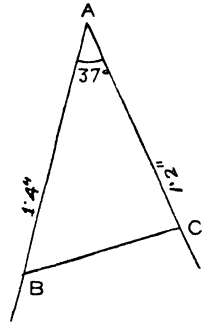
উদা ৯। সপ্তম উদাহরণের চিত্রে AED, DEB, BEC এবং CEA কোণগুলির মধ্যে,

(১) BED = ৬৩°, অপর তিনটির প্রত্যেকের পরিমাণ কত ?
(২) AED = ১০৭°, „ „ „ „ „
(৩) CEA = ৪৭°, „ „ „ „ „

প্রত্যেক **ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ** (parts); যথা, তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ। কোনও ত্রিভুজের একটি বাহু এবং অপর যে কোনও দুইটি অঙ্গ দেওয়া থাকিলেই ত্রিভুজটি অঙ্কিত হইতে পারে।

উদা ১০। এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার দুটি বাহু যথাক্রমে ১'২ ইঞ্চি ও ১'৪ ইঞ্চি এবং তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ ৩৭°।

কোণমান যন্ত্রের সাহায্যে ৩৭° পরিমাণ BAC কোণ অঙ্কিত কর। এই কোণটির AB বাহু হইতে ১'৪ ইঞ্চি পরিমাণ AB অংশ এবং AC বাহু হইতে ১'২ ইঞ্চি পরিমাণ AC অংশ ছেদ কর। BC সংযুক্ত কর। এখন ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

A
37°
1.4"
1.2"
C
B

উদা ১১। ABC ও DEF দুটি ত্রিভুজ আঁক যেন AB বাহু = DE বাহু = ২", AC বাহু = DF বাহু = ২'৫", এবং ∠A = ∠D = ৫৫°।

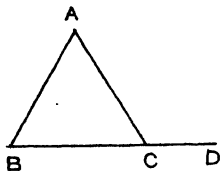
ত্রিভুজ দুটির অবশিষ্ট বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য মাপিয়া তুলনা কর এবং B কোণ E কোণের সহিত ও C কোণ F কোণের সহিত তুলনা কর।

ত্রিভুজ দুটি কাটিয়া একটির উপর অপরটি রাখিয়া পরীক্ষা করিয়া দেখ, ইহারা সর্বসম কি না। ত্রিভুজ দুটি ঠিক মত আঁকা এবং কাটা হইলে দেখিতে পাইবে যে, উহারা সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে। অতএব, উহারা **সর্বসম**।

সংজ্ঞা। *যদি একটি ত্রিভুজ অপর একটি ত্রিভুজের উপর এরূপভাবে স্থাপন করা যাইতে পারে যে, উহারা সর্বতোভাবে মিলিয়া যায়, তবে ঐ ত্রিভুজ দুটি* **সর্বসম** (Congruent) *বা সর্বতোভাবে সমান।*

দুটি ত্রিভুজ সর্বতোভাবে মিলিয়া গেলে একের ছয় অঙ্গ অন্যের ছয় অঙ্গের সহিত মিলিয়া যায় এবং উহাদের ক্ষেত্রফলও সমান হয়। দুটি

সর্বসম ত্রিভুজের যে দুটি অঙ্গ পরস্পর মিলিয়া যায় তাহাদের একটিকে অপরটির **অনুরূপ** (Corresponding) অঙ্গ বলে।

উদা ১২। (১) ABC একটি ত্রিভুজ আঁক। BC বাহু D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর। ACD কোণ ত্রিভুজটির বাহিরে কি ভিতরে? ACD কোণকে ABC ত্রিভুজের একটি **বহিঃকোণ** (exterior angle) বলে। ABC, BCA ও CAB কোণ তিনটির প্রত্যেকেই ABC ত্রিভুজের **অন্তঃকোণ** (interior angle); তন্মধ্যে ACB কোণ, ACD কোণের **সন্নিহিত** (adjacent) কোণ এবং অবশিষ্ট ABC ও BAC কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি ACD কোণের তুলনায় **বিপরীত অন্তঃকোণ** (interior opposite angle)। এখন A, B ও ACD কোণ তিনটির পরিমাণ কোণমান যন্ত্রদ্বারা নির্ণয় কর। BAC ও ACD কোণ দুটির কোন্‌টি বড়? ABC ও ACD কোণ দুটির কোন্‌টি বড়? A ও B কোণ দুটির সমষ্টি কত? ACD কোণ A ও B কোণদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বড় কি ছোট?

এইরূপে ABC ত্রিভুজের অপর দুই বাহু বর্ধিত করিয়া যে দুটি বহিঃকোণ পাইবে, তাহাদের প্রত্যেকের সহিত ইহার বিপরীত অন্তঃকোণ দুটির পূর্বোক্ত প্রকারে তুলনা কর।

(২) মনে কর, একজন B বিন্দুতে এবং অন্য একজন C বিন্দুতে দাঁড়াইয়া উভয়েই D এর দিকে চাহিয়া রহিল। এখন A বিন্দুর দিকে ফিরিতে হইলে কাহাকে বেশি ঘুরিতে হইবে?

(৩) ইচ্ছা মত কতকগুলি ত্রিভুজ আঁকিয়া, ঐরূপে প্রত্যেক ত্রিভুজের প্রত্যেক বহিঃকোণের সহিত উহার বিপরীত অন্তঃকোণ দুটির তুলনা কর।

উল্লিখিত উদাহরণ হইতে অনুমান করা যাইতে পারে যে,

ত্রিভুজের কোনও বাহু বর্ধিত হইলে, উৎপন্ন বহিঃকোণ প্রত্যেক বিপরীত অন্তঃকোণ অপেক্ষা বড় হইবে এবং বিপরীত অন্তঃকোণ দুটির সমষ্টির সমান হইবে।

উদা ১৩। দশম উদাহরণে যে ত্রিভুজটি অঙ্কিত হইয়াছে তাহার BC বাহুব দৈর্ঘ্য কত? ABC ও BCA কোণের পরিমাণ কত? ঐ ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টির পরিমাণ কত?

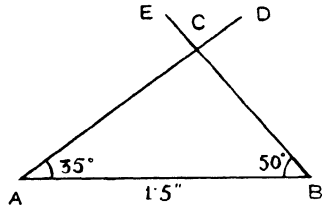
উদা ১৪। নিম্নলিখিত অঙ্গবিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কিত কর এবং অবশিষ্ট অঙ্গগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর:

(১)	AB = ১″,	AC = ১·৫″,	∠A = ৬০°
(২)	AB = ১·২″,	BC = ২″,	∠B = ৩৮°
(৩)	AB = ৪ সেঃ মিঃ,	AC = ৩ সেঃ মিঃ,	∠A = ৫৫°
(৪)	AB = ২·৪″,	BC = ৩·২″,	∠B = ৯০°

এই ত্রিভুজগুলির প্রত্যেকের তিন কোণের সমষ্টি ১৮০° কি না দেখ।

উদা ১৫। কোনও ত্রিভুজের এক বাহু দেড় ইঞ্চি এবং ইহার সংলগ্ন দুইটি কোণের পরিমাণ ৩৫° ও ৫০°। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

দেড় ইঞ্চি পরিমিত একটি সরলরেখা টান; AB যেন ঐ রেখা।

AB রেখার একই পার্শ্বে A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে ৩৫° ও ৫০° পরিমাণ BAD ও ABE কোণদ্বয় অঙ্কিত কর। মনে কর, AD ও BE রেখাদ্বয় C বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

দ্রষ্টব্য। যদি A বিন্দুতে ৫০° এবং B বিন্দুতে ৩৫° পরিমাণ কোণ অঙ্কিত করা হইত, তবে প্রদত্ত অঙ্গবিশিষ্ট অন্য একটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইত।

উদা ১৬। ABC ও DEF দুটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন BC বাহু = EF বাহু = ২·৩″, ∠B = ∠E = ৮০°, এবং ∠C = ∠F = ৬৭°।

ত্রিভুজ দুটির অবশিষ্ট বাহুগুলি ও কোণগুলি মাপিয়া তুলনা কর। ত্রিভুজ দুটি কাটিয়া ইহারা সর্বসম কি না পরীক্ষা করিয়া দেখ।

ত্রিভুজ দুটি ঠিক মত আঁকা এবং কাটা হইলে দেখিতে পাইবে যে, উহারা সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে। অতএব উহারা সর্বসম।

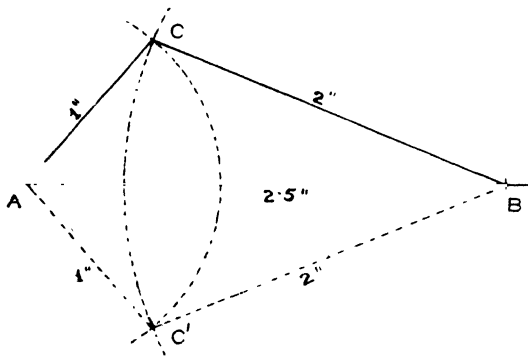
উদা ১৭। নিম্নলিখিত অঙ্গবিশিষ্ট ABC ত্রিভুজ অঙ্কিত কর এবং অবশিষ্ট অঙ্গগুলির পরিমাণ মাপিয়া স্থির কর ঃ

(১) AB = ১·২″, ∠A = ২৩°, ∠B = ৪৪°
(২) BC = ১·৮″, ∠B = ৬৬°, ∠C = ৬৬°
(৩) AC = ২·৪″, ∠C = ৪২°, ∠A = ৭৫°

উদা ১৮। নিম্নলিখিত অঙ্গবিশিষ্ট ABC ত্রিভুজ আঁকিতে পার কি না চেষ্টা কর। না পারিলে, কেন আঁকিতে পার না বল।

(১) AB = ২·৭″, ∠A = ৯০°, ∠B = ৯৮°
(২) BC = ৩·৬″, ∠B = ১৩৫°, ∠C = ৪৫°
(৩) AC = ৩·৯″, ∠C = ১০৮°, ∠A = ৭৫°

উদা ১৯। এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ১ ইঞ্চি, ২ ইঞ্চি ও ২·৫ ইঞ্চি হইবে।

একটি সরল রেখা AB টানিয়া উহা হইতে ২·৫ ইঞ্চি পরিমাণ AB অংশ কাটিয়া লও।

A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ১ ইঞ্চি ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক

আবার B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ২ ইঞ্চি ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক।

এই উভয় বৃত্তের পরিধি যেন C ও C′ বিন্দুতে ছেদ করিল। AC, BC, AC′, BC′ সংযুক্ত কর।

এখন ABC ও ABC′ এই দুটি ত্রিভুজের প্রত্যেকটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

কারণ, ABC ত্রিভুজের AC, CB ও AB বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ১ ইঞ্চি, ২ ইঞ্চি, ২.৫ ইঞ্চি এবং ABC′ ত্রিভুজের AC′, C′B ও AB বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ১ ইঞ্চি, ২ ইঞ্চি, ও ২.৫ ইঞ্চি।

মন্তব্য। বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজ আঁকিবার সময় বৃহত্তম বাহু সকলের আগে টানাই ভাল।

উদা ২০। ১৯ উদাহরণের চিত্রটি কাটিয়া কাগজখানি AB সরলরেখা ক্রমে ভাঁজ কর। এখন দেখ BC′, BC এর সঙ্গে, CA′, CA এর সঙ্গে এবং C′ বিন্দু C বিন্দুর সঙ্গে মিলিয়া গেল কি ?

উদা ২১। ABC ও DEF, এমন দুটি ত্রিভুজ আঁক যেন AB = DE = ২″, BC = EF = ২.৫″ এবং AC = DF = ৩.৫″ হয়। ত্রিভুজ দুটি কাটিয়া লও। এখন দেখ, ত্রিভুজ দুটির একটি অপরটির উপর এরূপভাবে রাখিতে পার কি না, যেন ত্রিভুজ দুটি সর্বতোভাবে মিলিয়া যায়। আঁকা ও কাটা ঠিক হইলে, উহাদিগকে সর্বতোভাবে মিলাইতে পারা যাইবে। অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

২০ ও ২১ উদাহরণ হইতে দেখা যায় যে,

যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের তিন বাহু যথাক্রমে অপরের তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হইবে।

উদা ২২। এমন একটি ABC ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার AB বাহু = AC বাহু এবং ∠A = ৬৭°; অবশিষ্ট কোণ দুটি মাপিয়া স্থির কর। কোণ দুটি সমান কি ?

ঐ ত্রিভুজটি কাটিয়া কাগজখানি এইরূপে ভাঁজ কর যেন উহার AB বাহু, AC বাহুর সঙ্গে মিলিয়া যায়। এখন B বিন্দু, C বিন্দুর সহিত এবং BC বাহুর এক অংশ অপর অংশের সহিত মিলিয়া গেল কি ?

ত্রিভুজটি আঁকা ঠিক হইলে উহারা মিলিয়া যাইবে, অর্থাৎ B কোণ C কোণের সহিত মিলিয়া যাইবে। অতএব $\angle B = \angle C$।

সংজ্ঞা। যে ত্রিভুজের দুই বাহু সমান তাহাকে **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ** (Isosceles triangle) বলে।

অতএব দেখিতেছ যে, **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ দুটিও পরস্পর সমান।**

উদা ২৩। এমন একটি ABC ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার BC বাহু ২·৮ ইঞ্চি এবং $\angle B = \angle C =$ ৫০°। অবশিষ্ট বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের তুলনা কর।

ঐ ত্রিভুজটি কাটিয়া কাগজখানি এমনভাবে ভাঁজ কর যেন ত্রিভুজটির AB বাহু AC বাহুর উপর পড়ে। এখন B বিন্দু C বিন্দুর সহিত মিলিয়া গেল কি ? ত্রিভুজটি আঁকা ঠিক হইলে উহারা মিলিয়া যাইবে।

অতএব দেখিতেছ যে, **কোন ত্রিভুজের দুই কোণ সমান হইলে ঐ কোণ দুটির বিপরীত বাহু দুটিও সমান হইবে।**

উদা ২৪। নিম্নলিখিত বাহুবিশিষ্ট ABC ত্রিভুজ আঁক।

(১) AB = ২″, BC = ২″, AC = ২″

(২) AB = ১·৫″, BC = ১·৫″, AC = ১·৫″

(৩) AB = ১·৮″, BC = ১·৮″, AC = ১·৮″

ঐ ত্রিভুজ তিনটির প্রত্যেকের তিন কোণ মাপিয়া দেখ। উহাদের মধ্যে যে কোন একটি ত্রিভুজ কাটিয়া উহার কোণগুলি ছিঁড়িয়া এক কোণের উপর অপর কোণ রাখিয়া দেখ কোণগুলি সব সমান কি না ?

এখন বলত, **যদি কোন ত্রিভুজের তিন বাহু পরস্পর সমান হয় তবে উহার কোণ তিনটিও পরস্পর সমান কি ?**

উদা ২৫। এমন একটি ABC ত্রিভুজ আঁক যাহার তিন বাহুই অসমান। এখন উহার বাহু এবং কোণগুলি মাপিয়া নিম্নলিখিত তালিক পূর্ণ কর।

AB বাহু = ইঞ্চি	ACB কোণ = ডিগ্রী
AC বাহু = ইঞ্চি	ABC কোণ = ডিগ্রী
BC বাহু = ইঞ্চি	BAC কোণ = ডিগ্রী

এখন দেখ কোন্ বাহুটি এবং কোন্ কোণটি বৃহত্তম। কোন্ বাহু এবং কোন্ কোণ ক্ষুদ্রতম।

বাহু এবং কোণগুলি উহাদের মানের ক্রমানুসারে লিখ। এখন বলত, বাহুগুলি এবং উহাদের বিপরীত কোণগুলি একই ক্রমে লিখা হইল কি ?

ভিন্ন ভিন্ন আয়তনের ঐরূপ ABC ত্রিভুজ আঁকিয়া পূর্বোক্তরূপ কার্য কর।

এই উদাহরণ হইতে নিম্ন সিদ্ধান্তে পৌঁছিলে কি ?

(১) ত্রিভুজের দুই বাহু অসমান হইলে, বৃহত্তর বাহুর **সম্মুখীন** কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর **সম্মুখীন** কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

(২) ত্রিভুজের দুই কোণ অসমান হইলে বৃহত্তর কোণের **সম্মুখীন** বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের **সম্মুখীন** বাহু অপেক্ষা বড় হইবে।

উদা ২৬। ১৪ উদাহরণে যে ত্রিভুজগুলি অঙ্কিত করিলে উহাদের প্রত্যেকের যে কোন দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য হইতে বড় কি না দেখ।

উদা ২৭। ABC একটি ত্রিভুজ আঁক। এই ত্রিভুজটির বাহুগুলির দৈর্ঘ্য মাপিয়া স্থির কর এবং নিম্নলিখিত তালিকা পূর্ণ কর।

AB= ইঞ্চি	BC ও CA বাহুদ্বয়ের সমষ্টি= ইঞ্চি
BC= ইঞ্চি	AB ও AC বাহুদ্বয়ের সমষ্টি= ইঞ্চি
CA= ইঞ্চি	AB ও BC বাহুদ্বয়ের সমষ্টি= ইঞ্চি

এখন কি সিদ্ধান্ত করিলে তাহা নিজের ভাষায় লিখ।

উদা ২৮। নিম্নলিখিত বাহু বিশিষ্ট ABC ত্রিভুজ আঁকিতে পার কি না চেষ্টা কর। না পারিলে, কেন আঁকিতে পার না বল।

(১) AB=৪″, BC=২·৫″, AC=১·৮″
(২) AB=১·২″, BC=৩·৬″, AC=১·৬″
(৩) AB=৫″, BC=২″, AC=২″

লম্ব ও সমান্তরাল সরলরেখা

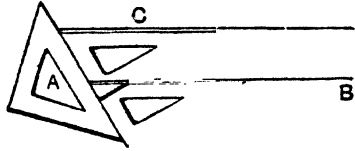
সংজ্ঞা। যদি দুটি সরলরেখা একই সমতলে এরূপভাবে থাকে যে, তাহাদিগকে উভয় দিকে যতদূর বর্ধিত কর না কেন, কিছুতেই তাহারা পরস্পর মিলিত হইবে না, তবে তাহাদিগকে **সমান্তরাল সরলরেখা** (Parallel straight lines) বলে।

ত্রিকোণী ও তাহার ব্যবহার

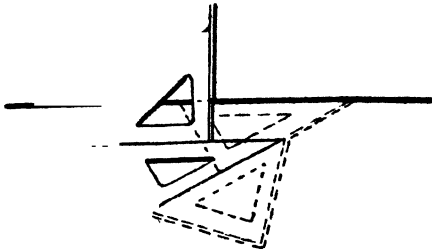
লম্ব এবং সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কনের জন্য দুইখানা ত্রিভুজাকৃতি যন্ত্র আছে, ইহাদের নাম **সেট্ স্কোয়ার** (Set Square)। ইহাদের প্রত্যেকেরই তিনটি কোণ আছে বলিয়া ইহাদিগকে **ত্রিকোণী**ও বলা হয়। ইহাদের প্রত্যেকেরই একটি কোণ সমকোণ, এবং সমকোণের বিপরীত বাহুটি সর্বাপেক্ষা বড়; উহাকে আমরা **অতিভুজ** বলিব।

সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এক নির্দিষ্ট AB সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানিতে হইবে।

প্রথম প্রক্রিয়া : একখানি ত্রিকোণী এরূপভাবে রাখ যেন ইহার অতিভুজ AB সরলরেখার সহিত মিশিয়া থাকে।

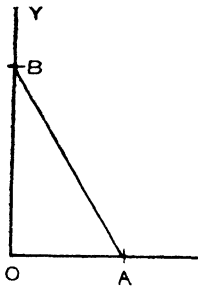
দ্বিতীয় প্রক্রিয়া : উক্ত ত্রিকোণীর অপর দুই বাহুর যে কোনটির সহিত অপর একখানি ত্রিকোণীর অতিভুজ (অথবা মাপনীখানার একধার) সংলগ্ন করিয়া শেষোক্ত ত্রিকোণীখানি দৃঢ়রূপে ধর।

তৃতীয় প্রক্রিয়া : এখন প্রথমোক্ত ত্রিকোণী শেষোক্ত ত্রিকোণীর অতিভুজের সহিত ঐরূপ সংলগ্ন রাখিয়া এরূপভাবে সরাইয়া লও যেন ইহার অতিভুজ C বিন্দুর অতি সন্নিকট হয়।

তারপর প্রথমোক্ত ত্রিকোণীখানির অতিভুজের গায়ে গায়ে C বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টান। এই সরলরেখা AB সরলরেখার সমান্তরাল এবং ইহা C বিন্দু দিয়া টানা হইল।

লম্ব অঙ্কন। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিযা একটি প্রদত্ত সরলরেখার উপর লম্ব টানিতে হইলে, নিম্নের চিত্রে প্রদর্শিত রূপে একখানা ত্রিকোণীর অতিভুজ প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল করিয়া রাখ, (সমান্তরাল করিয়া রাখিবার জন্য উপরিউক্ত প্রণালী দেখ)।

তারপর অপর ত্রিকোণীখানা এইরূপ ভাবে রাখ যেন উহার সমকোণের

সন্নিহিত একবাহু পূর্বোক্ত ত্রিকোণীর অতিভুজের সঙ্গে সংলগ্ন থাকে এবং অপর বাহু নির্দিষ্ট বিন্দুর গায়ে থাকে। এখন ত্রিকোণীর এই বাহুর গায়ে গায়ে নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টান। এই সরলরেখাই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে প্রদত্ত সরলরেখার উপর লম্ব।

সংজ্ঞা। যে ত্রিভুজের কেবল একটি কোণ সমকোণ তাহাকে **সমকোণী** ত্রিভুজ (right-angled triangle) বলে। সমকোণী **ত্রিভুজের** সমকোণের সম্মুখীন বাহুকে **অতিভুজ** (hypotenuse) বলে।

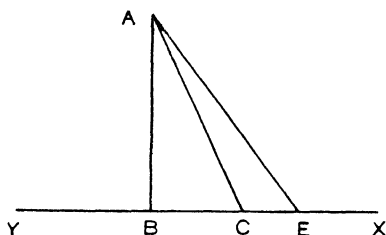
উদা ২৯। একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার অতিভুজ ১″ এবং অপর একটি বাহু ½ ইঞ্চি।

কোণমান যন্ত্রের সাহায্যে XOY একটি ৯০° কোণ আঁকিয়া ঐ কোণের OX বাহু হইতে ½ ইঞ্চি পরিমাণ OA অংশ ছেদ কর। Aকে কেন্দ্র করিয়া ১″ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। মনেকর ঐ বৃত্ত OYকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। AB সংযুক্ত কর। তাহা হইলে, AOB উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

উদা ৩০। ABC, DEF এমন দুটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁক, যেন অতিভুজ AC= অতিভুজ DF এবং BC=EF।

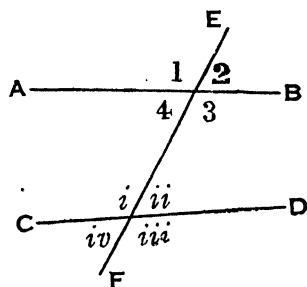
ত্রিভুজ দুইটির অবশিষ্ট বাহু এবং কোণগুলি মাপিয়া স্থির কর। এখন বলত AB, DE এর সমান, A কোণ D কোণের সমান এবং C কোণ F কোণের সমান কি না।

ঐ ত্রিভুজ দুটি কাটিয়া দেখ যে, উহাদের একটি অপরটির সহিত সর্বতোভাবে মিলিয়া যায় কি না। কাটা ও আঁকা ঠিক হইলে দেখিবে উহারা মিলিয়া যাইবে, অর্থাৎ উহারা সর্বসম।

উদা ৩১। ৩০ উদাহরণের ত্রিভুজ দুটির মত অপর দুটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁকিয়া উহারা সর্বসম কি না পরীক্ষা করিয়া দেখ।

উদা ৩২। XY একটি সরলরেখা টান। ইহার বাহিরে যে কোনও একটি বিন্দু A লও। XY এর উপর AB লম্ব টান। এখন AB রেখার একই পার্শ্বে XY এর উপর যে কোন দুটি C এবং E বিন্দু লও। AC ও AE সংযুক্ত কর। AB, AC, AE এর দৈর্ঘ্য মাপিয়া স্থির কর। ইহাদের মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তম? ক্ষুদ্রতমই বা কোন্‌টি?

Aকে কেন্দ্র করিয়া AB এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এখন বলত, AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন রেখা A হইতে XY পর্যন্ত টানিতে পার কি?

এখন বলত, A হইতে XY রেখা পর্যন্ত যে সকল সরলরেখা টানা যাইতে পারে তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম কোন্‌টি?

উদা ৩৩। AB ও CD দুটি সরলরেখা টান। এই দুটি রেখা ভেদ করিয়া EF সরলরেখা টান। AB ও EF রেখা দুটি পরস্পর ছেদনে কয়টি কোণ উৎপন্ন হইল? CD ও EF রেখা দুটির পরস্পর ছেদনে কয়টি কোণ উৎপন্ন হইল? মোট কয়টি কোণ উৎপন্ন হইল?

অবশ্যই আটটি। 1, 2, 3, 4, *i*, *ii*, *iii*, *iv* করিয়া কোণগুলি চিহ্নিত কর। (পার্শ্বের চিত্র দেখ)।

3,4, *i*, *ii* চিহ্নিত চারিটি কোণ AB ও CD রেখার মধ্যে আছে বলিয়া ইহাদিগকে **অন্তঃকোণ** (interior angle) বলে। 1, 2, *iii*, *iv* চিহ্নিত চারিটি কোণ ঐ রেখা দুটির বাহিরে আছে বলিয়া ইহাদিগকে **বহিঃকোণ** (exterior angle) বলে।

ইহাদের মধ্যে 4 এবং *ii* চিহ্নিত কোণ দুটিকে **একান্তর** (alternate) **কোণ** বলে। সেইরূপ, *i* এবং 3 চিহ্নিত কোণ দুটিও একান্তর কোণ।

1 ও *i* চিহ্নিত কোণ দুটিকে **অনুরূপ কোণ** (corresponding angle) বলে। সেইরূপ, 2 এবং *ii* ; *iii* এবং 3 ; *iv* এবং 4 ইহারা অনুরূপ কোণ।

উদা ৩৪। (১) একটি সরলরেখা টান ; EF যেন এই রেখা। EF রেখার মধ্যে G ও H দুটি বিন্দু লও। G বিন্দুর মধ্য দিয়া AGB যে কোনও একটি সরলরেখা টান। HGB কোণের সমান করিয়া GH রেখার H বিন্দুতে GHC কোণ আঁক। CH রেখা D পর্যন্ত বর্ধিত কর। সেট্‌স্কোয়ার দ্বারা পরীক্ষা করিয়া দেখ, AB ও CD সমান্তরাল কি না ; যদি আঁকিতে ভুল না কর, তবে সমান্তরাল হইবে।

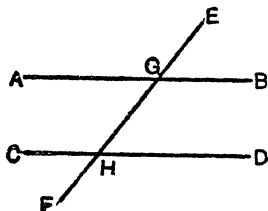
(২) পূর্বের ন্যায় EF ও AB রেখা দুটি টান। H বিন্দুর মধ্য দিয়া এরূপভাবে CHD সরলরেখা টান যেন ∠GHD ইহার অনুরূপ EGB কোণের সমান হয়। ত্রিকোণীর দ্বারা পরীক্ষা করিয়া দেখ, AB ও CD রেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল কি না। আঁকা নির্ভুল হইয়া থাকিলে সমান্তরাল হইবে।

(৩) আবার পূর্বের মত EF ও AB রেখাদ্বয় টান। HGB কোণের পরিমাণ কত ডিগ্রী (কোণমান যন্ত্র দ্বারা নির্ণয় কর) ? আর কত ডিগ্রী হইলে ১৮০° হইবে ? এখন GH রেখার H বিন্দুতে GHD কোণ আঁক, যেন GHD কোণ ও HGB কোণ একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান হয়। DH রেখা C পর্যন্ত বর্ধিত কর। ত্রিকোণীর দ্বারা পরীক্ষা করিয়া দেখ,

AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল কি না। আঁকা নির্ভুল হইলে সমান্তরাল হইবে।

এই উদাহরণ হইতে অনুমান করা যাইতে পারে যে,

এক সরলরেখা অপর দুটি সরলরেখাকে ভেদ করিলে, যদি (১) একান্তর কোণদ্বয় পরস্পর সমান হয়, (২) অনুরূপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান হয়, অথবা (৩) ঐ রেখার একই পার্শ্বস্থিত অন্তঃকোণদ্বয় একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান হয়, তবে সরলরেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

উদা ৩৫। AB ও CD দুটি সমান্তরাল সরলরেখা টান। এই দুটি রেখা ভেদ করিয়া ইচ্ছামত যে কোন EF সরলরেখা টান। মনে কর যেন EF রেখা AB রেখাকে G বিন্দুতে এবং CD রেখাকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন

(১) একান্তর কোণগুলি মাপিয়া নিম্নপ্রদর্শিত প্রণালীতে তুলনা কর :

AGH কোণ =	ডিগ্রী।	BGH কোণ =	ডিগ্রী।
GHD কোণ =	ডিগ্রী।	GHC কোণ =	ডিগ্রী।

(২) অনুরূপ কোণগুলি মাপিয়া নিম্নপ্রদর্শিত প্রণালীতে তুলনা কর :

$\angle$EGB =	ডিগ্রী।	$\angle$EGA =	ডিগ্রী।
$\angle$GHD =	ডিগ্রী।	$\angle$GHC =	ডিগ্রী।
$\angle$FHD =	ডিগ্রী।	$\angle$FHC =	ডিগ্রী।
$\angle$HGB =	ডিগ্রী।	$\angle$HGA =	ডিগ্রী।

(৩) EF রেখার একই পার্শ্বস্থিত অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর :

$\angle$AGH =	ডিগ্রী।	$\angle$BGH =	ডিগ্রী।
$\angle$CHG =	ডিগ্রী।	$\angle$DHG =	ডিগ্রী।
সমষ্টি =	ডিগ্রী।	সমষ্টি =	ডিগ্রী।

উদা ৩৬। EF সরলরেখা বিভিন্ন দিকে টানিয়া উক্ত প্রকারে পরীক্ষা কর।

৩৫ ও ৩৬ উদাহরণ হইতে দেখা যাইতেছে যে,

দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে অন্য একটি সরলরেখা ভেদ করিলে (১) একান্তর কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে; (২) অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে; (৩) ভেদকের একই পার্শ্বস্থিত অন্তঃকোণদ্বয় একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান হইবে।

উদা ৩৭। একটি সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া বিভিন্ন দূরে পাঁচটি সরলরেখা টান। ত্রিকোণী দ্বারা পরীক্ষা করিয়া দেখ ঐ পাঁচটি রেখা পরস্পর সমান্তরাল কি না। এখন এই পাঁচটি রেখা উভয় দিকে বর্ধিত করিয়া দেখ যে, উহারা পরস্পর ছেদ করে কি না, অথবা কখনও পরস্পর ছেদ করিবার সম্ভাবনা আছে কি না।

ইহা হইতে যে সিদ্ধান্ত স্থির করিলে তাহা নিজের ভাষায় লিখ।

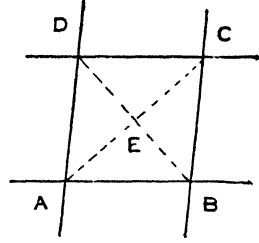
উদা ৩৮। দুটি সমান এবং সমান্তরাল সরলরেখা টান এবং উহাদের এক এক পার্শ্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় যোগ কর। এইরূপে যে দুটি সরলরেখা উৎপন্ন হইল তাহাদের দৈর্ঘ্য মাপিয়া তুলনা কর। উহারা কি সমান? ত্রিকোণীর দ্বারা পরীক্ষা করিয়া দেখ, উহারা সমান্তরাল কি না। পুনরায় উহাদিগকে উভয় দিকে বর্ধিত করিয়া দেখ, উহারা সমান্তরাল কি না।

উদা ৩৯। বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের পাঁচ জোড়া সমান ও সমান্তরাল সরলরেখা লইয়া ৩৮ উদাহরণের মত পরীক্ষা করিয়া দেখ।

৩৮ ও ৩৯ উদাহরণ হইতে কি সিদ্ধান্তে উপনীত হইয়াছ, তাহা তোমার নিজের ভাষায় লিখ।

(সামান্তরিক)

উদা ৪০। দুটি সমান্তরাল সরলরেখা টান। আবার দুটি সমান্তরাল সরলরেখা টান যেন ইহারা প্রথমোক্ত রেখা দুটিকে ছেদ করিতে পারে।

এই চারিটি রেখার পরস্পর ছেদনে চারিটি বিন্দু উৎপন্ন হইল; মনে কর A,B,C,D যেন এই চারি বিন্দু। ABCD একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র। ইহার চারিটি ভুজ বা বাহু; এই জন্য ইহার নাম **চতুর্ভুজ**। ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল; এই জন্য ABCDকে **সামান্তরিক** (parallelogram) বলে। এখন মাপিয়া দেখ, যে BC বাহু ইহার বিপরীত AD বাহুর সমান কি না। এইরূপে আরও দেখ, AB বাহু ইহার বিপরীত CD বাহুর সমান কি না।

AC ও BD রেখাদ্বয় টান। এই রেখা দুটিকে ABCD চতুর্ভুজের দুটি **কর্ণ** (diagonal) বলে। ইহারা যেন E বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল।

AE ও CE রেখাদ্বয়ের দৈর্ঘ্য মাপিয়া তুলনা কর। AC কর্ণের মধ্যবিন্দু কোন্‌টি? এইরূপে BE, DE রেখাদ্বয়ের দৈর্ঘ্য তুলনা কর। BD কর্ণের মধ্যবিন্দু কোন্‌টি? ABCD সামান্তরিকের কর্ণ দুটি কিরূপ ভাবে পরস্পর ছেদ করিয়াছে? উভয়ে পরস্পর দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে কি?

উদা ৪১। বিভিন্ন আকারের পাঁচটি সামান্তরিক আঁকিয়া ৪০ উদাহরণের মত ইহাদের প্রত্যেকের বিপরীত বাহুগুলি ও কর্ণদ্বয় পরীক্ষা কর।

৪০ ও ৪১ উদাহরণ হইতে দেখা যায় যে,

সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কর্ণদ্বয়ের একটি অপরটিকে দ্বিখণ্ডিত করে।

উদা ৪২। একটি সামান্তরিক আঁকিয়া উহার বিপরীত কোণগুলি মাপিয়া তুলনা কর। বিপরীত কোণগুলি কি পরস্পর সমান? আঁকা নির্ভুল হইয়া থাকিলে সমান হইবে।

উদা ৪৩। বিভিন্ন আকারের পাঁচটি সামান্তরিক আঁকিয়া তাহাদের বিপরীত কোণগুলি তুলনা কর।

৪২ ও ৪৩ উদাহরণ হইতে দেখা যায় যে,

সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান।

দ্বিতীয় অধ্যায়

তত্ত্বীয় জ্যামিতি

প্রথম পরিচ্ছেদ

প্রথম অধ্যায়ে পরীক্ষা দ্বারা কয়েকটি জ্যামিতিক সিদ্ধান্ত পাওয়া গিয়াছে, ঐরূপ পরীক্ষা দ্বারা যে সকল সিদ্ধান্ত পাওয়া যায় সেগুলি যে সর্বদাই সত্য তাহা এই অধ্যায়ে দেখান হইবে।

প্রতিজ্ঞা। জ্যামিতির এক একটি আলোচ্য বিষয়কে **প্রতিজ্ঞা** (Proposition) বলে।

প্রতিজ্ঞা **দুই** প্রকার—**সম্পাদ্য** ও **উপপাদ্য**।

যে প্রতিজ্ঞায় জ্যামিতিক কোন সত্য প্রমাণ করিতে হয় তাহাকে **উপপাদ্য** (Theorem) বলে।

যে প্রতিজ্ঞায় জ্যামিতিক কোন অঙ্কন সম্পন্ন করিতে হয় তাহাকে **সম্পাদ্য** (Problem) বলে।

কোন একটি প্রতিজ্ঞার প্রথমেই (১) প্রতিজ্ঞাটি কি বা আলোচ্য বিষয়টি কি তাহা চিত্রাদির সাহায্য ব্যতীত সাধারণ ভাবে কথায় ব্যক্ত করা হয়, পরে (২) চিত্রাদির সাহায্যে উহা পরিষ্কার করিয়া বলা হয়, ইহার পরে (৩) প্রতিজ্ঞার উদ্দেশ্য সাধনের জন্য আবশ্যকীয় অঙ্কনাদি * করিয়া (৪) যুক্তি দ্বারা প্রতিজ্ঞাটি সত্য বলিয়া প্রমাণ করিতে হয়।

অতএব দেখিতেছ, প্রত্যেক প্রতিজ্ঞারই চারিটি অঙ্গ। ইহাদিগের নাম যথাক্রমে, (১) **সাধারণ নির্বচন** (General Enunciation) (২) **বিশেষ নির্বচন** (Particular Enunciation) (৩) **অঙ্কন** (Construction) এবং (৪) **প্রমাণ** (Proof)।

যদ্দ্বারা প্রতিজ্ঞার উদ্দেশ্য অর্থাৎ যাহা প্রমাণ বা যাহা অঙ্কন করিতে

* কোন কোন প্রতিজ্ঞায় অঙ্কনের আবশ্যক হয় না, আবার কোন কোন প্রতিজ্ঞায় অঙ্কন প্রমাণের সঙ্গেই জড়িত থাকে।

হইবে তাহা চিত্রাদির সাহায্য ব্যতীত সাধারণ ভাবে কথায় ব্যক্ত করা হয় তাহাকে প্রতিজ্ঞার **সাধারণ নির্বচন** বলে।

কোনও প্রতিজ্ঞার প্রমাণ হইতে যে সত্য সহজেই পাওয়া যাইতে পারে তাহাকে ঐ প্রতিজ্ঞার **অনুসিদ্ধান্ত** (Corollary) বলে।

জ্যামিতি। যে শাস্ত্রে ঘন, তল, ক্ষেত্র, এবং রেখার ধর্মাবলী ও অঙ্কন প্রণালী আলোচিত হয় তাহাকে **জ্যামিতি** (Geometry) বলে।

যে জ্যামিতিতে একই সমতলে অবস্থিত রেখা ও ক্ষেত্রের ধর্মাবলী ও অঙ্কন প্রণালী আলোচিত হয় তাহাকে **সামতলিক জ্যামিতি** (Plane Geometry) বলে। জ্যামিতির যে অংশে সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞার বিষয় আলোচিত হয় তাহাকে **ব্যবহারিক** বা **ফলিত জ্যামিতি** (Practical Geometry) বলে। অতএব, ব্যবহারিক জ্যামিতির প্রত্যেক প্রতিজ্ঞার নাম সম্পাদ্য। জ্যামিতির যে অংশে উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার বিষয় আলোচিত হয় তাহাকে **তত্ত্বীয়** বা **বাদীয়** জ্যামিতি (Theoretical Geometry) বলে।

অতএব, তত্ত্বীয় জ্যামিতির প্রত্যেক প্রতিজ্ঞার নাম উপপাদ্য।

সাঙ্কেতিক চিহ্ন

পাটিগণিতে যে যে অর্থে +, − ও = এই তিনটি চিহ্ন ব্যবহৃত হয় 'আধুনিক জ্যামিতি'তেও সেই সেই অর্থে এই তিনটি চিহ্ন ব্যবহৃত হইবে। যেমন 'A কোণ+B কোণ=C কোণ+D কোণ' ইহা দ্বারা A ও B কোণের সমষ্টি C ও D কোণের সমষ্টির সমান বুঝাইবে।

ইহা ব্যতীত নিম্নলিখিত সাঙ্কেতিক চিহ্নগুলি ব্যবহৃত হইবে।

অতএব, সুতরাং	বুঝাইতে	$\therefore$	অন্তঃকোণ	বুঝাইতে	অন্তঃ$\angle$
যেহেতু, কারণ	”	$\because$	সমকোণ	”	সম$\angle$
অনুসিদ্ধান্ত	”	অনু	উপপাদ্য	”	উপ
স্বতঃসিদ্ধ	”	স্বতঃ	ত্রিভুজ	”	$\triangle$
ABC কোণ	”	$\angle$ABC	বৃহত্তর	”	$>$
বহিঃকোণ	”	বহিঃ$\angle$	ক্ষুদ্রতর	”	$<$

AB ও CD এর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র বুঝাইতে আয়ত AB. CD বা AB.CB

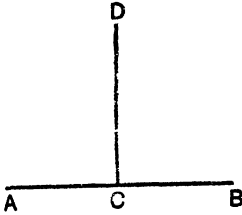
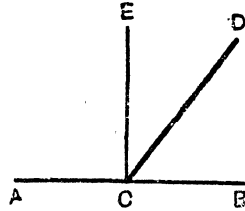
AB এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ” AB এর বর্গক্ষেত্র বা AB^2

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—রেখা ও কোণ

[এখানে শিক্ষার্থিগণ প্রথম অধ্যায়ের এক হইতে আট উদাহরণের পুনরালোচনা করিবে ।]

উপপাদ্য ১

এক সরলরেখা অপর এক সরলরেখার উপর দাঁড়াইলে, যে দুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাহারা একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান ।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র)

মনে কর AB সরলরেখার উপর CD সরলরেখা দাঁড়াইয়া ACD ও BCD এই দুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করিল ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ACD ও BCD কোণ দুটি একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান ।

প্রমাণ। যদি CD, ABর উপর লম্ব হয় (১ম চিত্র দেখ) তবে ACD ও BCD কোণের প্রত্যেকটিই এক সমকোণ হইবে ।

অতএব $\angle ACD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ ।

কিন্তু যদি CD, ABর উপর লম্ব না হয় (২য় চিত্র দেখ) তবে, মনে কর C বিন্দুতে CE সরলরেখা AB রেখার উপর লম্ব ।

এখন, $\angle ACE + \angle BCE =$ দুই সমকোণ

কিন্তু, $\angle ACD + \angle BCD = \angle ACE + \angle ECD + \angle DCB.$

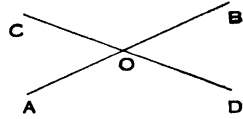
আবার, $\angle ACE + \angle BCE = \angle ACE + \angle ECD + \angle DCB.$

অতএব, $\angle ACD + \angle BCD = \angle ACE + \angle BCE$ (১ম স্বতঃ)
= দুই সমকোণ।

অন্য প্রকার। $\angle ACD + \angle DCB = ACB$ সরলকোণ
= দুই সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ১। দুটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

কারণ, মনে কর AB ও CD সরলরেখা দুটি O বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন OC রেখা AB রেখার উপর দাঁড়াইয়াছে বলিয়া,

$\angle AOC + \angle COB =$ ২সম $\angle$

সেইরূপ, $\angle BOD + \angle DOA =$ ২ সম $\angle$

$\therefore \angle AOC + \angle COB + \angle BOD + \angle DOA =$ ৪ সম $\angle$.

অনু ২। কোন এক বিন্দুতে কতকগুলি সরলরেখা মিলিত হইলে যে সকল কোণ উৎপন্ন হয় তাহারা একত্রযোগে চারি সমকোণের সমান।

কারণ, উপরের চিত্রে O বিন্দু হইতে আরও কতকগুলি সরলরেখা টানিলেও দেখা যাইবে যে, O বিন্দুতে উৎপন্ন সমস্ত কোণের সমষ্টি AOC, COB, BOD, DOA এই চারি কোণের সমষ্টির সমান।

অন্য প্রকার প্রমাণের জন্য প্রথম অধ্যায়ের উদাহরণ ৪ দেখ।

সংজ্ঞা

কোনও দুই কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইলে, উহাদের একটিকে অপরটির **সম্পূরক** (Supplementary) বলে।

যথা, প্রথম উপপাদ্যের দ্বিতীয় চিত্রে, BCD, ACD কোণ দুটি পরস্পর সম্পূরক। একটি ৮৭° কোণ ৯৩° কোণের সম্পূরক।

কোনও দুই কোণের সমষ্টি এক সমকোণের সমান হইলে উহাদের একটিকে অপরটির **পূরক** (Complementary) বলে।

যথা, প্রথম উপপাদ্যের দ্বিতীয় চিত্রে BCD ও DCE কোণ দুটি পরস্পর পূরক। একটি ৬০° কোণ, ৩০° কোণের পূরক।

অনু ৩। একই কোণের (বা সমান সমান কোণের) সম্পূরক কোণগুলি পরস্পর সমান।

কারণ, যদি AOC, BOD কোণের প্রত্যেকে COB কোণের সম্পূরক হয় (১ম অনুসিদ্ধান্তের চিত্র দেখ) তবে,

$\angle AOC + \angle COB =$ ২ সম $\angle$

আবার, $\angle COB + \angle BOD =$ ২ সম $\angle$

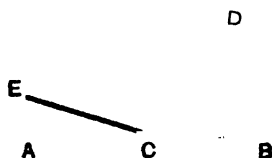
$\therefore \quad \angle AOC = \angle BOD.$

অনু ৪। একই কোণের (বা সমান সমান কোণের) পূরক কোণগুলি পরস্পর সমান।

প্রথম দ্রষ্টব্য। উপরিউক্ত প্রতিজ্ঞার নির্বচন দুই অংশে বিভক্ত করা যাইতে পারে। শেষের অংশ দ্বারা "দুটি সন্নিহিত কোণ একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান" ইহা প্রমাণ করিতে হইবে বুঝা যাইতেছে, এবং প্রথম অংশে ঐ সন্নিহিত কোণ দুটি কিরূপে উৎপন্ন হইয়াছে তাহাই কল্পনা করা হইয়াছে। এইরূপ দেখিতে পাওয়া যাইবে যে, প্রত্যেক উপপাদ্য প্রতিজ্ঞারই নির্বচনের দুটি অংশ; যথা (১) **কল্পনা** (Hypothesis), (২) **সিদ্ধান্ত** (Conclusion)। যাহা প্রমাণ করিতে হইবে তাহাকে **সিদ্ধান্ত** বলে, এবং ঐ সিদ্ধান্ত প্রমাণ করিতে হইলে যাহা স্বীকার করিয়া লইতে হয় অথবা যাহা দেওয়া আছে বলিয়া মনে করিতে হয় তাহাকে **কল্পনা** বলে।

দ্বিতীয় দ্রষ্টব্য। উল্লিখিত প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করিতে কল্পনা করা হইয়াছে যে AB রেখার C বিন্দুতে CE সরলরেখা AB রেখার উপর লম্ব। কারণ একটি সরলরেখার কোনও নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর একটি মাত্র লম্ব আছে (স্বতঃসিদ্ধ) ইহা আমরা জানি, সুতরাং ইহা হইতে আমরা কল্পনা করিয়া লইতে পারি যে C বিন্দুতে CE রেখা AB রেখার উপর লম্ব হইল। কোনও জ্যামিতিক সত্য প্রমাণের জন্য ঐরূপে যে অঙ্কন কল্পনা করিয়া লওয়া হয় তাহাকে **কল্পনাসিদ্ধ অঙ্কন** (Hypothetical Construction) বলে।

উপপাদ্য ২

যদি দুটি সন্নিহিত কোণ একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান হয়, তবে উহাদের বাহিরের দিকের বাহু দুটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

মনে কর, ACD ও BCD দুটি সন্নিহিত কোণ; আরও মনে কর যে, এই দুটি কোণ একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান। এই দুটি কোণের বাহিরের দিকের বাহু হইল BC এবং CA রেখা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে BC এবং CA রেখা দুটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে অর্থাৎ BC রেখা বর্ধিত করিলে CA রেখার সহিত মিশিয়া যাইবে।

যদি BC সরলরেখা বর্ধিত হইলে CA সরলরেখার সহিত মিশিয়া না যায়, তবে মনে কর যেন BC রেখার বর্ধিত অংশ CE সরলরেখা হইল।

তাহা হইলে, BCE একই সরলরেখা হইল।

এখন, BCE সরলরেখার উপর CD রেখা দাঁড়াইয়াছে।

অতএব $\angle BCD + \angle DCE =$ দুই সমকোণ। (উপ ১)

কিন্তু দেওয়া আছে যে, $\angle BCD + \angle DCA =$ দুই সমকোণ।

$\therefore \angle BCD + \angle DCE = \angle BCD + \angle DCA$ (১ম স্বতঃ)

উভয় দিক্ হইতে সাধারণ BCD কোণ বাদ দাও,

তাহা হইলে, $\angle DCE = \angle DCA$

কিন্তু DCE কোণ, DCA কোণের অংশ মাত্র, সুতরাং উহারা সমান হওয়া অসম্ভব।

অতএব CE রেখা BC রেখার বর্ধিতাংশ হইতে পারে না।

এইরূপে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, CA ব্যতীত অন্য কোন রেখা BC রেখার বর্ধিতাংশ হইতে পারে না।

অতএব BC ও CA একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অনু। দুটি সরলরেখার একই সাধারণ অংশ থাকিতে পারে না।

দ্রষ্টব্য ১। প্রথম উপপাদ্যে **কল্পনা** করা হইয়াছে যে ACD এবং BCD সন্নিহিত কোণ দুটির CA ও CB বাহু একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং **সিদ্ধান্ত** করা হইয়াছে যে ACD ও BCD কোণ দুটি একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান। কিন্তু দ্বিতীয় উপপাদ্যে, **কল্পনা** করা হইয়াছে যে, ACD ও BCD কোণ দুটি একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান এবং **সিদ্ধান্ত** করা হইয়াছে যে, CA ও CB বাহু একই সরলরেখায় অবস্থিত।

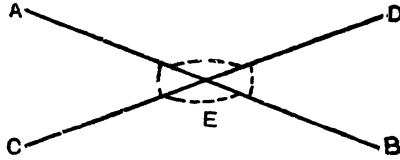
এইরূপ কোন প্রতিজ্ঞার কল্পনাকে সিদ্ধান্তে এবং সিদ্ধান্তকে কল্পনায় পরিবর্তিত করিলে যে নূতন একটি প্রতিজ্ঞা পাওয়া যায় তাহাকে উহার **বিপরীত** (Converse) **প্রতিজ্ঞা** বলে। অতএব, ১ম ও ২য় প্রতিজ্ঞা পরস্পর বিপরীত, কারণ উহাদের একটিতে যাহা কল্পনা করা হইয়াছে অপরটিতে তাহাই সিদ্ধান্ত করা হইয়াছে।

মন্তব্য। আবার দেখ, দুধ সাদা বা 'যাহা দুধ তাহা সাদা' কিন্তু ইহার বিপরীত বাক্য 'যাহা সাদা তাহা দুধ' সত্য নহে।

সেইরূপ **মনে রাখিও**, কোনও একটি প্রতিজ্ঞা সত্য হইলেই, তাহার বিপরীত প্রতিজ্ঞাটিও যে সত্য হইবে এমন নহে।

দ্রষ্টব্য ২। প্রথম ও দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞার প্রমাণ হইতে বুঝা যায় যে, প্রতিজ্ঞার প্রমাণ দ্বিবিধ। আমরা প্রথম প্রতিজ্ঞায় কল্পনা হইতে যুক্তি দ্বারা ক্রমে ক্রমে সিদ্ধান্তে উপনীত হইয়া সিদ্ধান্তের সত্যতা প্রমাণ করিয়াছি। কিন্তু দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞার সিদ্ধান্তে ঐরূপে উপনীত হইতে পারি নাই। এই স্থলে, সিদ্ধান্তটি সত্য বলিয়া স্বীকার না করিলে গুরুতর দোষ হয়, ইহা দেখাইয়া সিদ্ধান্তটির সত্যতা প্রমাণ করিয়াছি। প্রথম প্রতিজ্ঞার প্রমাণকে **অন্বয়ী** (direct) প্রমাণ এবং দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞার প্রমাণকে **ব্যতিরেকী** (indirect) প্রমাণ বলে।

উপপাদ্য ৩

দুটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে, বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

মনে কর, AB ও CD সরলরেখা দুটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, (১) $\angle AEC = \angle BED$

(২) $\angle AED = \angle CEB$

প্রমাণ। CD সরলরেখার উপর AE সরলরেখা দাঁড়াইয়াছে ;

অতএব $\angle AEC + \angle AED =$ দুই সমকোণ।

আবার, AB সরলরেখার উপর DE সরলরেখা দাঁড়াইয়াছে ;

অতএব $\angle AED + \angle BED =$ দুই সমকোণ।

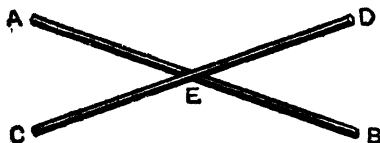
$\therefore \angle AEC + \angle AED = \angle AED + \angle BED$

উভয় পার্শ্ব হইতে $\angle AED$ বাদ দাও,

তাহা হইলে, $\angle AEC = \angle BED$

এইরূপে, দেখান যাইতে পারে যে $\angle AED = \angle CEB$

পরীক্ষা দ্বারা তৃতীয় উপপাদ্য সপ্রমাণ। দুইখানা সরু অথচ লম্বা এবং পুরু কাগজ লও (চিত্রে AB, CD ঐ কাগজ দুখানি) এবং উহাদিগকে একটি আল (চিত্রে E) দিয়া বিদ্ধ কর। প্রথমে AB এবং CD কে মিলিত করিয়া রাখ। এখন ধীরে ধীরে উহাদের

মধ্যের ফাঁক বাড়াও, এবং দেখ যে উহাদিগকে যে পরিমাণ

ঘুরাইলে BED কোণ উৎপন্ন হয় ঠিক সেই ঘুরানেই AEC বিপ্রতীপ কোণটিও উৎপন্ন হইল। সুতরাং তাহারা পরস্পর সমান।

পরীক্ষার্থ প্রশ্নমালা

১। প্রতিজ্ঞার নির্বচন কাহাকে বলে? ইহা কয় অংশে বিভক্ত করা যাইতে পারে? কল্পনা কাহাকে বলে? সিদ্ধান্ত কাহাকে বলে?

২। প্রথম প্রতিজ্ঞার নির্বচন কি? কল্পনা কি? সিদ্ধান্তই বা কি?

৩। প্রথম উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার প্রমাণে "$\angle ACE + \angle BCE = \angle ACD + \angle BCD$ স্বীকার করা হইয়াছে। ইহার যুক্তি কি?

[যুক্তি : উভয় সমষ্টি একই স্থান ব্যাপিয়া আছে।]

৪। দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞার নির্বচন কি? কল্পনা কি? সিদ্ধান্তই বা কি?

৫। একটি সরলরেখা টানিয়া ইহার কোনও একটি বিন্দুতে একই পার্শ্বে ৬০° ও ১২০° পরিমিত দুটি কোণ উৎপন্ন করিয়া দুটি সরলরেখা টান।

এই দুটি কোণের সমষ্টি কত? এই দুটি সরলরেখা কি একই সরলরেখা? কখন উহারা একই সরলরেখায় হইতে পারে?

৬। প্রতিজ্ঞার প্রমাণ কয় প্রকার? অন্বয়ী ও ব্যতিরেকী প্রমাণ কাহাকে বলে?

[যে প্রমাণে প্রতিজ্ঞার কল্পনা হইতে যুক্তি দ্বারা ক্রমে ক্রমে সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় তাহাকে **অন্বয়ী** প্রমাণ বলে। আর, যে প্রমাণে কোনও প্রতিজ্ঞা মিথ্যা বলিয়া মনে করিলে একটা অসম্ভব সিদ্ধান্তে উপস্থিত হইতে হয় বলিয়া প্রতিজ্ঞাটি সত্য বলিয়া স্বীকার করা হয় সেই প্রমাণকে **ব্যতিরেকী** প্রমাণ বলে]

৭। বিপরীত প্রতিজ্ঞা কাহাকে বলে? ছুটি পরস্পর বিপরীত প্রতিজ্ঞার নাম কর। কোন প্রতিজ্ঞা সত্য হইলে, উহার বিপরীত প্রতিজ্ঞাটিও সত্য হইবে কি? দৃষ্টান্ত দিয়া বুঝাইয়া দাও।

৮। তিনটি বিন্দু কখন একই সরল রেখায় অবস্থিত হইতে পারে?

[যুক্তি: বিন্দু তিনটির প্রান্তের ছুটিকে মধ্যেরটির সহিত সরলরেখা দ্বারা সংযুক্ত করিলে যে কোণ উৎপন্ন হয় তাহা ছুই সমকোণের সমান হইলে।]

৯। বিপ্রতীপ কোণ কাহাকে বলে? পরীক্ষা দ্বারা দেখাও যে, ছুটি বিপ্রতীপ কোণ পরস্পর সমান।

১০। কল্পনাসিদ্ধ অঙ্কন কাহাকে বলে? প্রথম প্রতিজ্ঞার প্রমাণে কি কল্পনাসিদ্ধ অঙ্কন করা হইয়াছে?

১১। তৃতীয় প্রতিজ্ঞার নির্বচন কি? কল্পনা কি? সিদ্ধান্তই বা কি?

অনুশীলনী ১

উপপাদ্য ১-৩

১। নিম্নলিখিত কোণগুলির পূরক কোণের পরিমাণ কত বল:—

৩০°, ৪৫°, ৭২°, ২২° ৩০′, ১৭° ১৩′ ৩৯″ এবং ৩১° ৪৭′ ২৯″

২। নিম্নলিখিত কোণগুলির সম্পূরক কোণের পরিমাণ কত বল:—

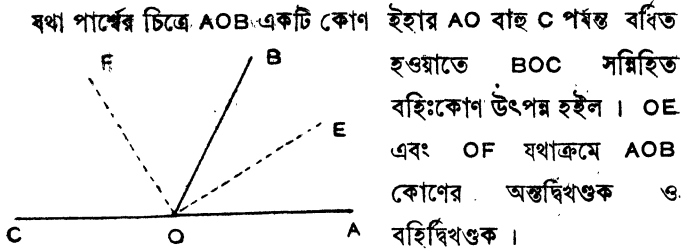
৩০°, ৪৫°, ৭২°, ৯০°, ১২০°, ২৬° ৪′ ৫৬″, ৪৭° ১৫′ ২১″, ১১৩° ৫৯′ ৫৯″ এবং ১৩৫° ১′ ১″।

৩। ছুটি পরস্পর পূরক কোণের বড়টি ছোটটির (১) দ্বিগুণ (২) তিন গুণ (৩) চারি গুণ (৪) আট গুণ হইলে, ছোটটির পরিমাণ কত ডিগ্রী?

৪। ছুটি পরস্পর সম্পূরক কোণের বড়টি ছোটটির (১) দ্বিগুণ (২) তিন গুণ (৩) পাঁচ গুণ (৪) আট গুণ (৫) নয় গুণ হইলে, ছোটটির পরিমাণ কত ডিগ্রী?

সংজ্ঞা। যে ছুটি সরলরেখা একটি কোণকে এবং উহার কোন এক বাহু বর্ধিত করিলে যে সন্নিহিত বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাহাকে দ্বিখণ্ডিত করে তাহাদিগকে যথাক্রমে ঐ কোণের **অন্তর্দ্বিখণ্ডক** (Internal bisector) ও **বহির্দ্বিখণ্ডক** (External bisector) বলে।

যথা পার্শ্বের চিত্রে AOB একটি কোণ ইহার AO বাহু C পর্যন্ত বর্ধিত

হওয়াতে BOC সন্নিহিত বহিঃকোণ উৎপন্ন হইল। OE এবং OF যথাক্রমে AOB কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক।

৫। যে কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক দুটির একটি অপরটির লম্ব।

৬। দুটি সরলরেখার পরস্পর ছেদনে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের একটি সমকোণ হইলে, অপর তিনটিও সমকোণ হইবে।

৭। চারিটি সরলরেখা কোনও এক বিন্দুতে মিলিত হইয়া যদি চারিটি সমকোণ উৎপন্ন করে, তবে ঐ চারিটি রেখার একটি অন্তর একটি সরলরেখা লইলে যে দুটি সরলরেখা পাওয়া যায় তাহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

৮। চারিটি সরলরেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের একটি অন্তর একটি কোণ লইলে যে দুই দুটি কোণ পাওয়া যায়, তাহারা পরস্পর সমান হইলে, ঐ চারিটি সরলরেখা দুটি সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

৯। AB সরলরেখার অন্তঃস্থ C একটি বিন্দু। C হইতে AB এর বিপরীত পার্শ্বে CD ও CE দুটি সরলরেখা অঙ্কিত করিলে যদি BCD কোণ ECA কোণের সমান হয়, তবে CD ও CE একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

১০। দুটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের দ্বিখণ্ডকগুলি এমন দুই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে যেন উহাদের একটি অপরটির লম্ব।

১১। দুটি বিপ্রতীপ কোণের, এক কোণের দ্বিখণ্ডক শীর্ষ দিয়া বর্ধিত করিলে উহা অপর কোণকেও দ্বিখণ্ডিত করিবে।

১২। দুটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে, বিপ্রতীপ কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক দুটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

ত্রিভুজ (প্রথমবার)

যে ক্ষেত্র তিনটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ তাহাকে **ত্রিভুজ** (Triangle) বলে।

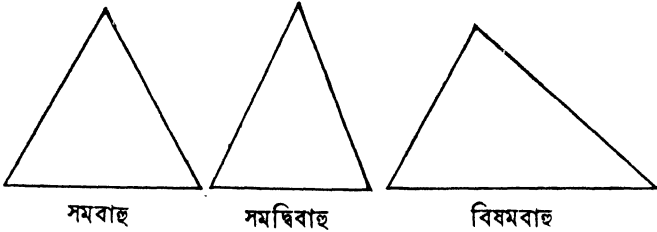
ভিন্ন ভিন্ন আকারের ত্রিভুজের নাম বাহু বা কোণ অনুসারে হইয়া থাকে।

বাহুভেদে ত্রিভুজ তিন প্রকার ; যথা, **সমবাহু,** (Equilateral) **সমদ্বিবাহু** (Isosceles) ও **বিষমবাহু** (Scalene)।

যে ত্রিভুজের তিন বাহুই পরস্পর সমান তাহাকে **সমবাহু** ত্রিভুজ বলে।

যে ত্রিভুজের কেবল দুই বাহু সমান তাহাকে **সমদ্বিবাহু** ত্রিভুজ বলে।

যে ত্রিভুজের কোনও দুই বাহু সমান নহে তাহাকে **বিষমবাহু** ত্রিভুজ বলে।

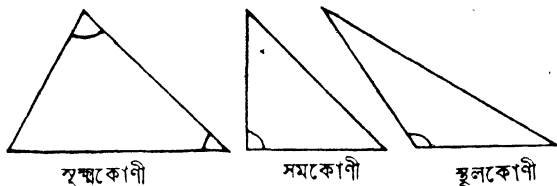
সমবাহু সমদ্বিবাহু বিষমবাহু

দ্রষ্টব্য। সাধারণতঃ ABC ত্রিভুজের A, B এবং C বিন্দুতে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ নির্দেশ করিবার জন্য যথাক্রমে A, B, C অক্ষর এবং A, B ও C বিন্দুর বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্দেশ করিবার জন্য যথাক্রমে a, b, c অক্ষর ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

ত্রিভুজের যে কোনও কৌণিক বিন্দুকে **শীর্ষ** (Vertex) বলা যায়। শীর্ষের বিপরীত বাহুকে ত্রিভুজের **ভূমি** (Base) এবং ভূমির বিপরীত কোণকে **শিরঃকোণ** (Vertical angle) বলে।

কিন্তু সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুটিকে সর্বদাই বাহু এবং তৃতীয় বাহুটিকে সর্বদাই ভূমি বলা হয়। এইজন্য সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ

বলিলে, উহার সমান বাহু দুটি যে কৌণিক বিন্দুতে মিলিত হয় সেই বিন্দুই বুঝায়।

কোণভেদে ত্রিভুজ তিন প্রকার; যথা, **স্থূলকোণী,** (Obtuse-angled) **সমকোণী** (Right-angled) ও **সূক্ষ্মকোণী** (Acute-angled)।

যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ তাহাকে **স্থূলকোণী** ত্রিভুজ বলে।
যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে **সমকোণী** ত্রিভুজ বলে।
যে ত্রিভুজের তিনটিই সূক্ষ্মকোণ তাহাকে **সূক্ষ্মকোণী** ত্রিভুজ বলে।

সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহুকে **অতিভুজ** (Hypotenuse) বলে।

কোনও ক্ষেত্র যে পরিমাণ স্থান অধিকার করিয়া থাকে তাহাকে ঐ ক্ষেত্রের **ক্ষেত্রফল** বা **কালি** (Area) বলে।

প্রত্যেক ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ, তিন বাহু ও তিন কোণ। বাহু ও কোণ ব্যতীত প্রত্যেক ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলও আছে।

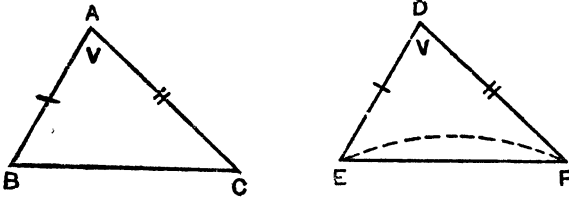
যদি দুটি ত্রিভুজের একটিকে অপরটির উপর এরূপ ভাবে স্থাপন করা যাইতে পারে যে উহারা সর্বতোভাবে মিলিয়া যায়, তবে ঐ ত্রিভুজ দুটি **সর্বসম** (Congruent or equal in all respects) হইবে।

দুটি ত্রিভুজ সর্বতোভাবে মিলিয়া গেলে, একের ছয় অঙ্গ অন্যের ছয় অঙ্গের সহিত মিলিয়া যায় এবং উহাদের ক্ষেত্রফলও সমান হয়। দুটি সর্বসম ত্রিভুজের যে দুটি অঙ্গ পরস্পর মিলিয়া যায়, তাহাদের একটিকে অপরটির **অনুরূপ** (Corresponding) অঙ্গ বলে।

যদি দুটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের মধ্যে একের কোণগুলি যথাক্রমে অপরের কোণগুলির সমান হয় তবে উহাদিগকে **সদৃশকোণ** (Equiangular) ক্ষেত্র বলে। অতএব, দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হইলে উহারা সদৃশকোণও হইবে।

[শিক্ষার্থিগণ এখানে প্রথম অধ্যায়ের দশ হইতে বার উদাহরণের পুনরালোচনা করিবে]।

উপপাদ্য ৪

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয় এবং সমান সমান বাহুগুলির অন্তর্ভূত কোণ দুটিও পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হইবে।

মনে কর ABC, DEF দুটি ত্রিভুজের মধ্যে, AB বাহু = DE বাহু,
AC বাহু = DF বাহু এবং অন্তর্ভূত ∠BAC = অন্তর্ভূত ∠EDF

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC, DEF ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

প্রমাণ। মনে মনে ABC ত্রিভুজটি উঠাইয়া DEF ত্রিভুজের উপর এরূপভাবে রাখ যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং AB বাহু DE বাহুর উপর পড়ে।

তাহা হইলে, B বিন্দুও E বিন্দুর উপর পড়িবে, কারণ, AB = DE ;
AB, DE এর সহিত মিলিত হওয়ায়, AC বাহুও DF বাহুর সহিত মিলিত হইবে, কারণ, ∠BAC = ∠EDF

∴ C বিন্দুও F বিন্দুর উপর পড়িবে ; কারণ, AC = DF.

B বিন্দু E বিন্দুর সহিত এবং C বিন্দু F বিন্দুর সহিত মিলিত হইল বলিয়া, BC ভূমিও EF ভূমির সহিত মিলিত হইল।

∴ ABC ও DEF ত্রিভুজ দুটি সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া গেল, অর্থাৎ উহারা সর্বসম হইল।

অনু। দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হইলে যদি তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ দুটিও পরস্পর সমান

হয়, তবে (১) তাহাদের তৃতীয় বাহুদ্বয় পরস্পর সমান হইবে, (২) সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে এবং (৩) ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলও সমান হইবে।

কারণ, ৪র্থ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের AB বাহু DE বাহুর সহিত, AC বাহু DF বাহুর সহিত এবং BC বাহু EF বাহুর সহিত মিলিয়া যাওয়াতে, (১) BC বাহু EF বাহুর সমান হইল। (২) AC বাহুর বিপরীত ABC কোণ অনুরূপ DF বাহুর বিপরীত DEF কোণের সমান হইল, এবং AB বাহুর বিপরীত ACB কোণ DE বাহুর বিপরীত DFE কোণের সমান হইল। (৩) এবং ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল DEF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান হইল।

অনুশীলনী ২

১। একটি সরলরেখা AB এর মধ্যবিন্দু হইতে উহার উপর লম্ব টানিলে, ঐ লম্বের অন্তঃস্থ যে কোনও বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

২। ABC একটি ত্রিভুজের যে কোনও দুই বাহুর মধ্যবিন্দু হইতে উহাদের উপর লম্ব টানিলে, যদি লম্ব দুটি O বিন্দুতে ছেদ করে তবে, OA = OB = OC হইবে।

৩। যদি কোনও রেখা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণকে দুই সমান অংশে বিভক্ত করে, তবে ঐ রেখা ত্রিভুজটিকেও দুই সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

৪। কোন ত্রিভুজের শীর্ষ ও ভূমির মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা ভূমির উপর লম্ব হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

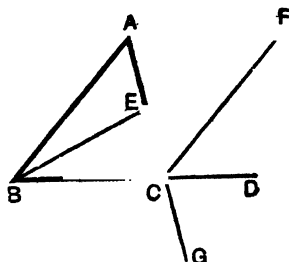
৫। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB ও AC সমান বাহু দুটির মধ্যে যথাক্রমে E ও F এমন দুটি বিন্দু লও যেন AE, AF এর সমান হয়; এখন BF ও CE সংযুক্ত করিলে, প্রমাণ কর যে, BF = CE

৬। AOB একটি কোণের OA বাহু = OB বাহু, এবং AOB কোণের দ্বিখণ্ডকের অন্তঃস্থ C যে কোনও বিন্দু। প্রমাণ কর যে,

$$AC = BC \text{ এবং } \angle OCA = \angle OCB.$$

৭। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ-দ্বিখণ্ডক ভূমির উপর লম্ব হইবে।

উপপাদ্য ৫

একটি ত্রিভুজের কোনও বাহু বর্ধিত হইলে উৎপন্ন বহিঃকোণ প্রত্যেক বিপরীত অন্তঃকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

মনে কর ABC ত্রিভুজের BC বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত হইয়া ACD বহিঃকোণ উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) বহিঃ$\angle$ ACD বিপরীত অন্তঃ$\angle$ BAC অপেক্ষা বৃহত্তর,

(২) বহিঃ$\angle$ ACD বিপরীত অন্তঃ$\angle$ ABC অপেক্ষা বৃহত্তর।

অঙ্কন। মনে কর E, AC বাহুর মধ্যবিন্দু। BE সংযুক্ত কর; BE রেখাকে F পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন BE = EF হয়। CF সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। AEB, CEF ত্রিভুজ দুটির মধ্যে;

AE = CE, BE = EF

এবং অন্তর্ভূত $\angle$AEB = অন্তর্ভূত $\angle$CEF (উপ ৩)

অতএব, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। (উপ ৪)

$\therefore$ $\angle$EAB = $\angle$ECF

কিন্তু $\angle$ACD, $\angle$ECF অপেক্ষা বৃহত্তর,

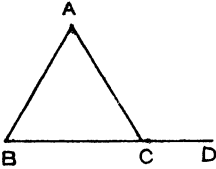
অতএব $\angle$ACD, $\angle$EAB অর্থাৎ $\angle$CAB অপেক্ষা বৃহত্তর।

(২) আবার AC কে G পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া এবং Aকে BCএর মধ্যবিন্দুর সহিত সংযুক্ত করিয়া এই প্রকারে দেখান যাইতে পারে যে,

$\angle$BCG, $\angle$ABC অপেক্ষা বৃহত্তর।

কিন্তু $\angle ACD$ = বিপ্রতীপ BCG কোণ

∴ বহিঃ $\angle ACD >$ বিপরীত অন্তঃ $\angle ABC$.

অনুসিদ্ধান্ত ১। ত্রিভুজের যে কোন দুই কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

কারণ, $\angle ABC < \angle ACD$.

∴ $\angle ABC + \angle ACB$

$< \angle ACD + \angle ACB$.

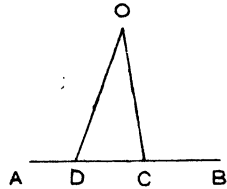
কিন্তু, $\angle ACD + \angle ACB$ = ২ সম $\angle$

∴ $\angle ABC + \angle ACB <$ ২ সম $\angle$

অনু ২। প্রত্যেক ত্রিভুজের অন্ততঃ দুটি সূক্ষ্মকোণ থাকিবেই।

কারণ, তাহা না হইলে ত্রিভুজের কোন দুই কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। ইহা অসম্ভব (অনু ১)।

অনু ৩। একটি সরল রেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উহার উপর একটি মাত্র লম্ব টানা যাইতে পারে।

কারণ, O বিন্দু হইতে AB এর উপর OD ও OC উভয়ই লম্ব হইলে বহিঃ $\angle OCB$ = বিপরীত অন্তঃ $\angle ODC$ হয়। কিন্তু ইহা অসম্ভব।

অনুশীলনী ৩

১। ৫ম উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার দ্বিতীয় অংশ সম্পূর্ণরূপে প্রমাণ কর।

২। ত্রিভুজের প্রত্যেক কৌণিক বিন্দুতে যে দুটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হইতে পারে তাহারা পরস্পর সমান।

৩। ত্রিভুজের কোনও বাহু উভয় দিকে বর্ধিত করিলে যে দুটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের অধিক।

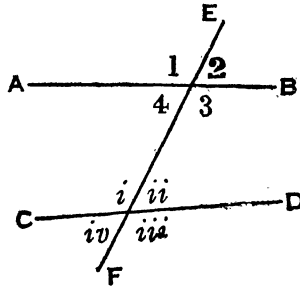
৪। ABC ত্রিভুজের মধ্যে O যে কোনও একটি বিন্দু; OB, OC সংযুক্ত করিলে প্রমাণ কর যে $\angle BOC$, $\angle BAC$ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

৫। যে ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুটি সমান তাহার ভূমি উভয় দিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণের প্রত্যেকটি স্থূলকোণ হইবে।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

সমান্তরাল সরলরেখা

যদি দুটি সরলরেখা একই সমতলে এরূপভাবে থাকে যে, তাহাদিগকে উভয়দিকে যতদূর বর্ধিত কর না কেন, কিছুতেই তাহারা পরস্পর মিলিত হইবে না, তবে তাহাদিগকে সমান্তরাল সরলরেখা (Parallel straight lines) বলে।

যে সরলরেখা দুই বা ততোধিক সরলরেখাকে ভেদ করে তাহাকে **ভেদক** (Transversal) বলে। যথা, নীচের চিত্রে EF একটি ভেদক।

উপরের চিত্রে EF ভেদকটি AB ও CD সরলরেখা দুটিকে ভেদ করাতে 1, 2, 3, 4 এবং *i*, *ii*, *iii*, *iv* চিহ্নিত এই আটটি কোণ উৎপন্ন হইয়াছে।

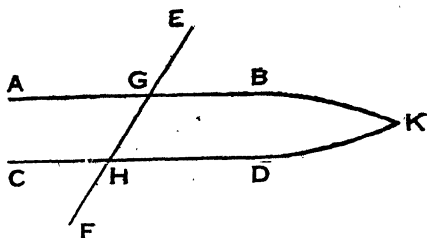
ইহাদের মধ্যে *i*, *ii*, 3, 4 চিহ্নিত কোণগুলি AB ও CD রেখার ভিতরের দিকে আছে বলিয়া উহাদিগকে **অন্তঃকোণ** (Interior angle) এবং 1, 2 *iii*, *iv* চিহ্নিত কোণগুলি AB ও CD রেখার বাহিরের দিকে আছে বলিয়া তাহাদিগকে **বহিঃকোণ** (Exterior angle) বলা হয়।

অন্তঃকোণগুলির মধ্যে 4 ও *ii* চিহ্নিত কোণ দুটিকে **একান্তর কোণ** (Alternate angle) বলে। সেইরূপ, 3 এবং *i* চিহ্নিত কোণদ্বয়ও একান্তর কোণ।

1 ও *i* চিহ্নিত কোণ দুটিকে **অনুরূপ কোণ** (Corresponding angle) বলে। সেইরূপ, 2 এবং *ii*; *iii* এবং 3; *iv* এবং 4 ইহারা অনুরূপ কোণ।

[এখানে শিক্ষার্থিগণ প্রথম অধ্যায়ের ৩৩ হইতে ৩৭ উদাহরণের পুনরালোচনা করিবে।]

উপপাদ্য ৬।

এক সরলরেখা অপর দুই সরলরেখাকে ভেদ করিলে, যদি একান্তর কোণদ্বয় পরস্পর সমান হয়, তবে সরলরেখা দুটি সমান্তরাল হইবে।

মনে কর, EF সরলরেখা AB ও CD সরলরেখা দুটিকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করায় AGH ও GHD একান্তর কোণদ্বয় সমান হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB ও CD সরলরেখা দুটি সমান্তরাল।

প্রমাণ। যদি AB ও CD সমান্তরাল না হয়, তবে উহাদিগকে B ও D এর দিকে অথবা A ও C এর দিকে বর্ধিত করিলে উহারা মিলিত হইবে।

মনে কর AB ও CDকে B ও D এর দিকে বর্ধিত করিলে উহারা K বিন্দুতে মিলিত হইল।

এখন KGH একটি ত্রিভুজ, ইহার KG বাহু A পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে।

$\therefore$ বহিঃ $\angle$ AGH বিপরীত অন্তঃ $\angle$ GHK অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

অর্থাৎ AGH কোণ GHD কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

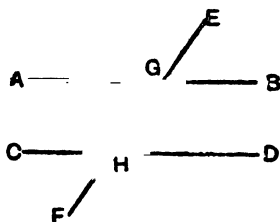
কিন্তু তাহা হইতে পারে না ; কারণ, দেওয়া আছে যে, $\angle AGH = \angle GHD$.

অতএব, AB ও CDকে B ও D এর দিকে বর্ধিত করিলে উহারা মিলিতে পারে না।

এইরূপে, দেখান যাইতে পারে যে, AB ও CDকে A ও C এর দিকে বর্ধিত করিলেও উহারা মিলিতে পারে না।

∴ AB ও CD সমান্তরাল।

উপপাদ্য ৭।

এক সরলরেখা অপর দুই সরলরেখাকে ভেদ করিলে যদি অনুরূপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ সরলরেখা দুটি সমান্তরাল হইবে।

মনে কর, EF সরলরেখা AB ও CD সরলরেখা দুটিকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ভেদ করিল এবং EGB ও GHD অনুরূপ কোণদ্বয় সমান হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD সরলরেখা দুটি সমান্তরাল।

প্রমাণ। দেওয়া আছে যে, $\angle EGB = \angle GHD$.

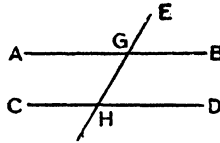
কিন্তু, $\angle EGB =$ বিপ্রতীপ $\angle AGH$ (উপ ৩)

∴ $\angle AGH = \angle GHD$, এবং ইহারা একান্তর কোণ।

∴ AB ও CD সমান্তরাল। (উপ ৬)

দ্রষ্টব্য। সপ্তম ও অষ্টম উপপাদ্য দুটি ৬ষ্ঠ উপপাদ্যের সাহায্য ব্যতীত ৬ষ্ঠ উপপাদ্যের অনুরূপ প্রক্রিয়া অবলম্বন করিয়া প্রমাণ করা যাইতে পারে। শিক্ষার্থিগণ ঐ প্রকারে প্রমাণ করিবে।

উপপাদ্য ৮

এক সরলরেখা অপর দুই সরলরেখাকে ভেদ করিলে যদি ভেদকের কোনও এক পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুটি একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান হয়, তবে সরলরেখা দুটি সমান্তরাল হইবে।

মনে কর, EF সরলরেখা AB ও CD সরলরেখা দুটিকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ভেদ করিল এবং BGH ও GHD অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD সরলরেখা দুটি সমান্তরাল।

প্রমাণ। দেওয়া আছে যে, ∠BGH + ∠GHD = ২ সম ∠

আবার, যেহেতু GH সরলরেখা AB সরলরেখার সহিত G বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

∴ ∠BGH + ∠AGH = ২ সম ∠ ; (উপ ১)

অতএব, ∠BGH + ∠AGH = ∠BGH + ∠GHD,

উভয় দিক্ হইতে সাধারণ ∠BGH বাদ দাও ;

তাহা হইলে, ∠AGH = ∠GHD এবং ইহারা একান্তর কোণ।

∴ AB এবং CD সমান্তরাল।

সরলরেখার দিক্ ও সমান্তরাল সরলরেখা

১। তোমরা দেখিয়াছ, বিন্দুর গতিতে রেখার উৎপত্তি হয়। মনে কর, একটি বিন্দু E বিন্দু হইতে রওনা হইয়া সোজাসুজি F বিন্দুর দিকে চলিতেছে। এখন যদি EF সরলরেখা পূর্ব পশ্চিমে প্রসারিত হইয়া থাকে,

তবে তোমরা ঐ বিন্দুটি কোন্ দিকে চলিতেছে বলিবে? নিশ্চয়ই পশ্চিম দিকে বলিবে। কিন্তু যদি বিন্দুটি F হইতে রওনা হইয়া সোজাসুজি E এর দিকে যায়, তবে কোন্দিকে চলিতেছে বলিবে? নিশ্চয়ই পূর্বদিকে চলিতেছে বলিবে। অতএব দেখ, একই সরলরেখা দ্বারা দুই দিক্ বুঝাইতে পারে। যদি EF (অর্থাৎ E হইতে F) সরলরেখা পশ্চিম দিক্ বুঝায়, তাহা হইলে FE (F হইতে E) সরলরেখা পূর্বদিক্ বুঝাইবে।

এখন মনে কর X ও Y দুটি বিন্দু E বিন্দু হইতে রওনা হইয়া (উপপাদ্য ৮ এর চিত্র দেখ) সোজাসুজি F এর দিকে (অর্থাৎ মনে কর পশ্চিম দিকে) চলিতে লাগিল। তারপর X বিন্দুটি G তে আসিয়া ঘুরিল এবং G বিন্দু হইতে সোজাসুজি B বিন্দুর দিকে চলিতে লাগিল। যদি GB (G হইতে B) সরলরেখা দক্ষিণ দিকে প্রসারিত হইয়া থাকে তবে তোমরা বলিবে যে, ঐ বিন্দুটি G হইতে ঘুরিয়া দক্ষিণ দিকে চলিতে লাগিল। কিন্তু Y বিন্দুটি বরাবর H বিন্দুতে আসিল এবং ঘুরিয়া H হইতে সোজাসুজি D বিন্দুর দিকে চলিতে লাগিল। X বিন্দু G তে আসিয়া যতটা ঘুরিয়াছিল Y, Hএ আসিয়া ঠিক ততটাই ঘুরিয়া যদি H হইতে D এর দিকে চলিতে থাকে, তবে তোমরা HD সরলরেখা কোন্ দিকে প্রসারিত বলিবে? নিশ্চয়ই দক্ষিণ দিকে (অর্থাৎ GB রেখার যে দিক্ সে দিকে) বলিবে।

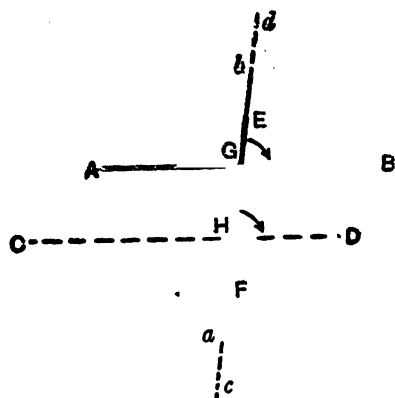
অতএব দেখ, যখন তোমরা জানিলে যে GB, EF হইতে যতটা ঘুরিয়াছে HDও EF হইতে ঠিক ততটা ঘুরিয়াছে (অর্থাৎ $\angle EGB = \angle GHD$), তখন তোমরা GB এবং HD একই দিকে প্রসারিত বলিয়াছ; কিন্তু $\angle EGB$ ও $\angle GHD$ ইহারা অনুরূপ কোণ

$\therefore$ GB ও HD সমান্তরাল।

অতএব দেখিতে পাইলে যে,

একই দিকে প্রসারিত সরলরেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল।

২। আবার মনে কর, EF, ab, এবং cd সরলরেখা তিনটি পরস্পর মিশিয়া আছে। পরে ab ও cd রেখা দুটি যথাক্রমে G ও H বিন্দুর চতুর্দিকে (চিত্রে তীরচিহ্ন সূচক ভাবে) ঘুরিতে লাগিল। এখন, ab রেখা যতটা ঘুরিয়া AB অবস্থানে আসিল, cd রেখা ঠিক ততটাই ঘুরিয়া

CD অবস্থানে আসিল। অতএব, AB ও CD সমান্তরাল হইল, কারণ

∠EGB ও ∠GHD একই পরিমাণ ঘূর্ণনের ফলে উৎপন্ন হইয়াছে। সুতরাং ইহারা পরস্পর সমান এবং ইহারা অনুরূপ কোণ।

এখন স্পষ্টই দেখ, ab রেখার কোনও এক (মনে কর AB) অবস্থানের জন্য cd রেখার **কেবল মাত্র এমন একটিই** (চিত্রে CD) অবস্থান থাকিতে পারে যেজন্য ∠EGB = ∠GHD.

অতএব H বিন্দু দিয়া AB এর সমান্তরাল মাত্র একটি সরল রেখাই টানা যাইতে পারে। অর্থাৎ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি মাত্র সরলরেখা হইতে পারে।

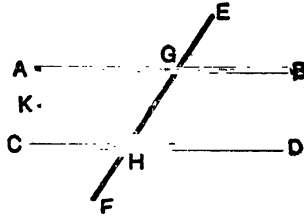
ইহা হইতে নিম্নলিখিত জ্যামিতিক **স্বতঃসিদ্ধ** পাওয়া যায়,

দুটি পরস্পর ছেদিত **সরলরেখার** প্রত্যেকেই একই **সরল** রেখার **সমান্তরাল হইতে পারে না।**

ইহা প্লেফায়ার নামক কোনও পণ্ডিত দ্বারা প্রতিপন্ন বলিয়া ইহাকে **প্লেফায়ার স্বতঃসিদ্ধ** (Playfair's Axiom) বলা হয়।

মন্তব্য। বর্তমানে উক্ত স্বতঃসিদ্ধের বিশেষ প্রচলন নাই। ইহার পরিবর্তে সপ্তম ও দশম উপপাদ্যের প্রচলন করা হইতেছে।

উপপাদ্য ৯

কোন সরলরেখা দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ভেদ করিলে, একান্তর কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

মনে কর AB ও CD সমান্তরাল সরলরেখা দুটিকে EF সরলরেখা যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AGH ও GHD একান্তর কোণ দুটি সমান।

প্রমাণ। যদি AGH কোণ, GHD কোণের সমান না হয়, তবে মনে কর যেন $\angle KGH = \angle GHD$ এবং ইহারা একান্তর কোণ।

$\therefore$ KG ও CD সমান্তরাল।

কিন্তু দেওয়া আছে যে, AB ও CD সমান্তরাল।

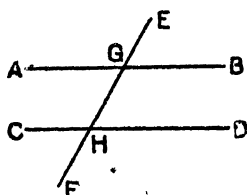
অতএব, পরস্পর ছেদিত AB ও KG সরলরেখা দুটিই CD রেখার সমান্তরাল হইল, কিন্তু ইহা হইতে পারে না। (প্লেফেয়ার স্বতঃ)

অতএব, AGH ও GHD একান্তর কোণ দুটি পরস্পর অসমান হইতে পারে না।

অর্থাৎ, $\angle AGH =$ একান্তর $\angle GHD$.

দ্রষ্টব্য। ষষ্ঠ ও নবম উপপাদ্য পরস্পর বিপরীত।

উপপাদ্য ১০

কোনও সরলরেখা দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ভেদ করিলে, অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

মনে কর, AB ও CD সমান্তরাল সরলরেখা দুটিকে EF সরলরেখা যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, EGB ও GHD অনুরূপ কোণ দুটি সমান।

প্রমাণ। যেহেতু EF সরলরেখা AB ও CD সমান্তরাল রেখা দুটিকে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে,

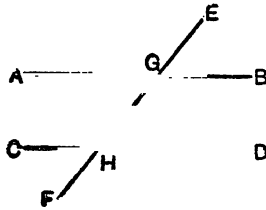
∴ ∠AGH = একান্তর ∠GHD. (উপ ৯)

কিন্তু ∠AGH = বিপ্রতীপ ∠EGB. (উপ ৩)

∴ ∠EGB = ∠GHD এবং ইহারা অনুরূপ কোণ।

দ্রষ্টব্য। দশম ও একাদশ উপপাদ্য দুটি নবম উপপাদ্যের সাহায্য ব্যতীত নবম উপপাদ্যের প্রক্রিয়া অবলম্বনে প্রমাণ করা যাইতে পারে। শিক্ষার্থিগণ ঐ প্রকারে প্রমাণ করিবে।

উপপাদ্য ১১

কোন সরলরেখা দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ভেদ করিলে, ভেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুটি একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান হইবে।

মনে কর, EF সরলরেখা AB ও CD সমান্তরাল সরলরেখা দুটিকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BGH ও GHD অন্তঃকোণ দুটি একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান।

প্রমাণ। যেহেতু EF রেখা AB ও CD সমান্তরাল রেখা দুটিকে ভেদ করিয়াছে,

$\therefore$ $\angle$AGH = একান্তর $\angle$GHD (উপ ৯)

উভয়দিকে $\angle$BGH যোগ কর।

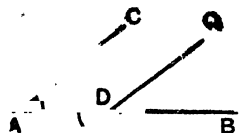
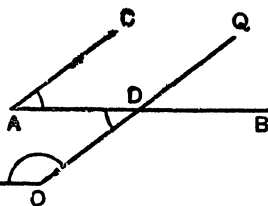
এখন, $\angle AGH + \angle BGH = \angle GHD + \angle BGH$

কিন্তু, AGH ও BGH সন্নিহিত কোণ দুটি একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান। (উপ ১)

$\therefore$ $\angle BGH + \angle GHD$ = ২ সম $\angle$

অর্থাৎ EF ভেদকের একই পার্শ্বস্থ BGH ও GHD অন্তঃকোণ দুটি একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান।

মন্তব্য। ৬৪ পৃষ্ঠার দ্রষ্টব্য দেখ।

অনু। এক কোণের দুই বাহু যথাক্রমে অপর একটি কোণের দুই বাহুর সমান্তরাল হইলে, ঐ কোণ দুটি পরস্পর সমান অথবা সম্পূরক হইবে।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র)

কারণ, প্রথম চিত্রে, ∠A = একান্তর ∠ADO = একান্তর ∠O

এবং দ্বিতীয় চিত্রে, ∠A = একান্তর ∠ADO = ∠O এর সম্পূরক।

দ্রষ্টব্য। উপরের চিত্রে লক্ষ্য করিবে যে, ১ম চিত্রে AB (A হইতে B) এবং OP (O হইতে P) একই দিকে প্রসারিত, কিন্তু ২য় চিত্রে AB ও OP বিপরীত দিকে প্রসারিত।

পরীক্ষার্থ প্রশ্নমালা

১। সমান্তরাল সরলরেখা কাহাকে বলে ?

সমান্তরাল সরলরেখার সংজ্ঞাতে 'একই সমতলে' এবং 'উভয় দিকে' এই কথা দুটি ব্যবহার করিবার তাৎপর্য কি ?

২। দুটি সরলরেখা উভয় দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত কর না কেন, তাহারা কিছুতেই মিলিবে না অথচ তাহারা সমান্তরাল নহে এইরূপ কোন দৃষ্টান্ত দিতে পার কি ?

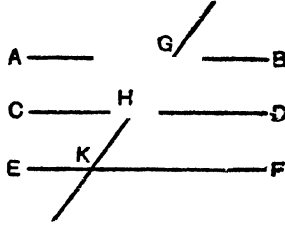
৩। সরলরেখার দিক্ কি করিয়া স্থির করিতে হয় ? প্রমাণ কর যে, একই দিকে প্রসারিত সরলরেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল।

৪। ষষ্ঠ ও নবম উপপাদ্যে কি মিথ্যা কল্পনা করা হইয়াছে এবং কি অসম্ভব সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া গিয়াছে ?

৫। কোনও দুটি সমান্তরাল সরলরেখার ধর্মাবলী বল।

৬। নবম উপপাদ্যে কি কল্পনাসিদ্ধ অঙ্কন করা হইয়াছে ?

উপপাদ্য ১২

যে সকল সরলরেখা একই সরলরেখার সমান্তরাল, তাহারা পরস্পর সমান্তরাল।

মনে কর, AB ও CD সরল রেখার প্রত্যেকেই EF সরলরেখার সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD সমান্তরাল।

প্রথম প্রকার

মনে কর, যে কোনও GHK সরলরেখা AB, CD ও EFকে যথাক্রমে G, H ও K বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। AB ও EF সমান্তরাল এবং GK ইহাদিগকে ভেদ করিয়াছে বলিয়া, $\angle AGK =$ একান্তর $\angle GKF$ (উপ ৯)

আবাব, CD ও EF সমান্তরাল এবং GK ইহাদিগকে ভেদ করিয়াছে বলিয়া, $\angle GKF =$ অনুরূপ $\angle GHD$ (উপ ১০)

$\therefore$ $\angle AGK = \angle GHD$ এবং ইহারা একান্তর কোণ।

অতএব, AB ও CD সমান্তরাল (উপ ৬)

দ্বিতীয় প্রকার

প্রমাণ। যদি AB ও CD সমান্তরাল না হয়, তবে উহাদিগকে বর্ধিত করিলে উহারা মিলিত হইবে।

অতএব, দুটি পরস্পর ছেদিত AB ও CD রেখার প্রত্যেকেই EF এর সমান্তরাল হইবে, কিন্তু তাহা হইতে পারে না। (প্লেফেয়ার স্বতঃ)

অতএব, AB ও CD বর্ধিত করিলে পরস্পর মিলিতে পারে না।
অর্থাৎ, AB ও CD সমান্তরাল।

দ্রষ্টব্য। EF সরলরেখা AB ও CD সরলরেখা দুটির মধ্যে অবস্থিত হইলে, স্পষ্টই দেখা যাইবে যে, AB ও CD সমান্তরাল। কারণ, AB ও CD রেখার কোনটিই EF এর সঙ্গে মিলিত হইতে পারে না। অতএব, AB ও CD কখনই মিলিতে পারে না, অর্থাৎ তাহারা সমান্তরাল।

অনুশীলনী ৪

১। এক সরলরেখা অপর দুই সরলরেখাকে ভেদ করিলে যদি ভেদকের একই পার্শ্বস্থ বহিঃকোণ দুটি একত্রযোগে দুই সমকোণ হয়, তবে ঐ রেখা দুটি সমান্তরাল হইবে।

২। কোন সরলরেখার অন্তঃস্থ অথবা বহিঃস্থ কোনও বিন্দু হইতে উহার উপর একটি মাত্র লম্ব টানা যাইতে পারে।

৩। কোন সরলরেখা দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ভেদ করিলে, (১) একান্তর কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক দুটি (২) অনুরূপ কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক দুটি সমান্তরাল হইবে।

৪। একই সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল।

৫। যে সকল সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল তাহাদের যে কোনও একটির উপর লম্ব, অন্যগুলির উপরও লম্ব হইবে।

৬। পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখার একটিকে অন্য কোনও সরলরেখা ছেদ করিলে, উহা সমান্তরাল রেখাগুলির প্রত্যেকটিকেই ছেদ করিবে।

৭। যদি AG ও GB সরলরেখা দুটির উভয়েই CD সরলরেখার সমান্তরাল হয়, তবে উহারা একই সরল রেখায় অবস্থিত হইবে।

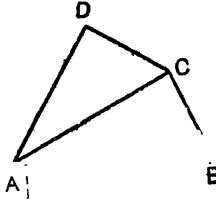
৮। দুটি পরস্পর ছেদিত সরলরেখা যথাক্রমে অপর দুটি পরস্পর ছেদিত সরলরেখার সমান্তরাল হইলে প্রথম দুটির অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণ শেষের দুটির অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণের সমান হইবে।

৯। দুটি ত্রিভুজের মধ্যে একের তিন বাহু যথাক্রমে অপরের তিন বাহুর সমান্তরাল হইলে উহারা সদৃশকোণ ত্রিভুজ হইবে।

১০। কোন ত্রিভুজের প্রত্যেক শীর্ষ দিয়া বিপরীত বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে, উৎপন্ন ত্রিভুজ প্রথম ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ হইবে।

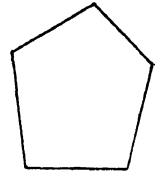
পঞ্চম পরিচ্ছেদ

ঋজুরেখ ক্ষেত্রের কোণ

যে সামতলিক ক্ষেত্র চারিটি সরলরেখা দ্বারা বেষ্টিত তাহাকে **চতুর্ভুজ** (Quadrilateral) বলে।

চতুর্ভুজের পরস্পর বিপরীত দুটি কৌণিক বিন্দুসংযোজক সরলরেখাকে **কর্ণ** (Diagonal) বলে।

উপরের চিত্রে ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং AC উহার একটি কর্ণ।

যে সামতলিক ক্ষেত্র চারিটির অধিক সরলরেখা দ্বারা বেষ্টিত তাহাকে **বহুভুজ** (Polygon) বলে।

ভুজ বা বাহুর সংখ্যা অনুসারে বহুভুজ ক্ষেত্রের নাম করা হয়। যথা,

যে বহুভুজের পাঁচটি বাহু তাহার নাম **পঞ্চভুজ** (Pentagon), যাহার ছয়টি বাহু তাহার নাম **ষড়্‌ভুজ** (Hexagon) ইত্যাদি।

বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলিকে উহার **শীর্ষ** বলা হয়।

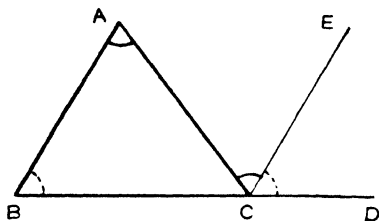
মন্তব্য। একটি বহুভুজের যতগুলি বাহু শীর্ষও ততগুলি।

কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান হইলে তাহাকে **সমবাহু** (equilateral) এবং কোণগুলি পরস্পর সমান হইলে **সদৃশকোণ** (equiangular) বলে।

কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্র সমবাহু এবং সদৃশকোণ এই উভয়ই হইলে তাহাকে **সুষম** (regular) বলে।

[শিক্ষার্থিগণ এখানে প্রথম অধ্যায়ের ১৩ ও ১৪ উদাহরণের পুনরালোচনা করিবে।]

উপপাদ্য ১৩

ত্রিভুজের তিন কোণ একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন। BC রেখাকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর, এবং C বিন্দু দিয়া AB এর সমান্তরাল CE সরলরেখা টান।

প্রমাণ। AB ও CE সমান্তরাল এবং AC ইহাদিগকে ছেদ করিয়াছে,

$\therefore \angle CAB =$ একান্তর $\angle ACE$ (উপ ৯)

আবার, BA ও CE সমান্তরাল এবং BD ইহাদিগকে ছেদ করিয়াছে,

$\therefore \angle ABC =$ অনুরূপ $\angle ECD$ (উপ ১০)

$\therefore \angle CAB + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD$

$= \angle ACD$

উভয় দিকে $\angle BCA$ যোগ কর।

তাহা হইলে, $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = \angle ACD + \angle BCA$

কিন্তু, ACD ও BCA সন্নিহিত কোণদুটি একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান। (উপ ১)

$\therefore \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA =$ দুই সম $\angle$

অনু ১। একটি ত্রিভুজের কোনও এক বাহু বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে।

কারণ, উপরিউক্ত উপপাদ্য প্রমাণ করিতে দেখান হইয়াছে যে,

$$\angle CAB + \angle ABC = \angle ACD$$

অনু ২। এক ত্রিভুজের দুই কোণ যথাক্রমে অপর এক ত্রিভুজের দুই কোণের সমান হইলে, ঐ ত্রিভুজ দুটির অবশিষ্ট কোণ দুটিও পরস্পর সমান হইবে।

অনু ৩। এক ত্রিভুজের যে কোনও দুই কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা কম।

দ্রষ্টব্য। ইহা হইতে দেখা যায় যে, কোনও ত্রিভুজের এক কোণ সমকোণ বা স্থূলকোণ হইলে উহার অপর দুই কোণই সূক্ষ্মকোণ হইবে।

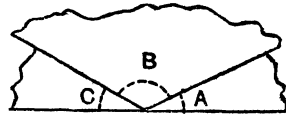
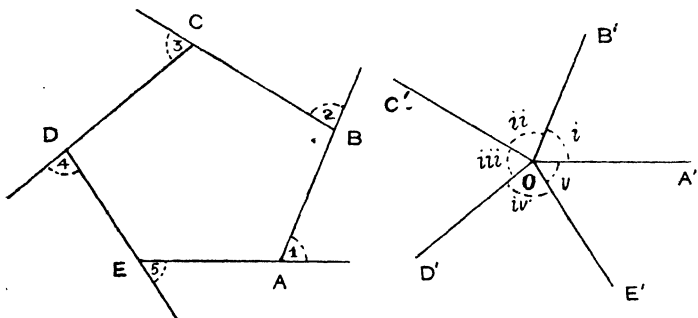
অনু ৪। যে ত্রিভুজের দুই কোণ একত্রযোগে উহার তৃতীয় কোণের সমান তাহা সমকোণী ত্রিভুজ।

অনু ৫। সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুটি পরস্পর পূরক। **বিপরীতক্রমে** ; কোন ত্রিভুজের দুই কোণ পরস্পর পূরক হইলে তাহা সমকোণী ত্রিভুজ হইবে।

পরীক্ষা দ্বারা ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি নির্ণয়

যে কোন একটি ABC ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া উহা কাটিয়া লও ; এখন ত্রিভুজটির A, B, C কোণগুলি ছিঁড়িয়া নিম্ন-প্রদর্শিত প্রণালীতে এইরূপ ভাবে রাখ যেন উহাদের শীর্ষগুলি একই বিন্দুতে থাকে, এবং মধ্যের কোণটি অন্য দুটির সহিত সংলগ্ন হইয়া থাকে। কাটা এবং

মিলান ঠিক হইলে দেখিবে, উহাদের বাহিরের দিকের বাহু দুটি একই সরল রেখায় থাকিবে, অর্থাৎ A, B, C কোণগুলি একত্রে মিলিয়া একটি সরলকোণ উৎপন্ন করিবে। সুতরাং $\angle A + \angle B + \angle C =$ ১৮০°

উপপাদ্য ১৪

যে বহুভুজের একটিও প্রবৃদ্ধ কোণ নাই, তাহার বাহুগুলি ক্রমান্বয়ে একইদিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণগুলি একত্রযোগে চারি সমকোণের সমান হইবে।

মনে কর, ABCDE একটি বহুভুজ, ইহার কোনও প্রবৃদ্ধ কোণ নাই। আরও মনে কর ইহার বাহুগুলি ক্রমান্বয়ে একইদিকে বর্ধিত করিলে চিত্রে 1, 2, 3, 4, 5 চিহ্নিত বহিঃকোণগুলি উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, বহিঃকোণগুলি একত্রযোগে চারি সমকোণের সমান।

অঙ্কন। যে কোনও একটি O বিন্দু লও; O হইতে EA, AB, BC, CD এবং DE বাহুগুলির দিকে প্রসারিত করিয়া যথাক্রমে OA′, OB′, OC′, OD′, এবং OE′ সরলরেখাগুলি উহাদের সমান্তরাল করিয়া টান।

প্রমাণ। যেহেতু OA′ ও OB′ যথাক্রমে EA ও AB এর সমান্তরাল এবং উহারা একই দিকে প্রসারিত হইয়াছে,

∴ বহিঃকোণ A = ∠A′OB′ (উপ ১১, অনু)

সেইরূপ, বহিঃকোণ B = ∠B′OC′

বহিঃকোণ C = ∠C′OD′

বহিঃকোণ D $= \angle D'\dot{O}E'$

বহিঃকোণ E $= \angle E'OA'$

অতএব, উৎপন্ন বহিঃকোণগুলির সমষ্টি

= O বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলির সমষ্টি।
= ৪ সম ∠ (উপ ১, অনু ২)

অনুসিদ্ধান্ত। প্রবৃদ্ধ কোণ নাই এরূপ কোনও ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমস্ত অন্তঃকোণ চারি সমকোণের সহিত একত্রযোগে ঐ ক্ষেত্রের বাহু-সংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণের সমান।

প্রমাণ। ক্ষেত্রের বাহুগুলি ক্রমান্বয়ে একই দিকে বর্ধিত কর।
এখন, সমস্ত অন্তঃকোণ + সমস্ত বহিঃকোণ

= ক্ষেত্রের শীর্ষ সংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণ।
= ক্ষেত্রের বাহু সংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণ।

কিন্তু, সমস্ত বহিঃকোণ = ৪ সম ∠ (উপ ১৪)
∴ সমস্ত অন্তঃকোণ + ৪ সম ∠
= ক্ষেত্রের বাহুসংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণ।

দ্রষ্টব্য ১। কোনও ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুসংখ্যা n হইলে, উহার সমস্ত অন্তঃকোণের সমষ্টি $+4$ সম ∠ $= 2n$ সম ∠
∴ উহার সমস্ত অন্তঃকোণের সমষ্টি $= (2n-4)$ সম ∠
$= 2(n-2)$ সম ∠

সংজ্ঞা। যে বহুভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কোণগুলিও পরস্পর সমান তাহাকে **সুষম** (regular) বহুভুজ বলে।

দ্রষ্টব্য ২। যেহেতু একটি সুষম বহুভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান,

অতএব, যে সুষম বহুভুজের বাহুসংখ্যা n, তাহার প্রত্যেক অন্তঃকোণের পরিমাণ

$$= \frac{2(n-2)}{n} \text{ সম } \angle$$

ইহা হইতে পাওয়া যায় যে,

একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ

$= \frac{২}{৩}$ সম $\angle$ বা ৬০° [∵ n = ৩]

সেইরূপ, একটি সুষম পঞ্চভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ

$= \frac{৬}{৫}$ সম $\angle$ বা ১০৮° [∵ n = ৫]

দ্রষ্টব্য ৩। কোন সুষম বহুভুজের বাহুগুলি ক্রমান্বয়ে একই দিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণগুলি পরস্পর সমান হইবে। অতএব যে সুষম বহুভুজের বাহুসংখ্যা n তাহার প্রত্যেক বহিঃকোণের পরিমাণ $= \frac{৪ \text{ সম } \angle}{n}$ বা $\frac{৩৬০°}{n}$।

পরীক্ষার্থ প্রশ্নমালা

১। ত্রয়োদশ উপপাদ্যে কি কল্পনাসিদ্ধ অঙ্কন করা হইয়াছে?

২। ৬০°, ৭০° এবং ৮০° কোণ বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে পারা যায় কি না বল।

৩। সমকোণী ত্রিভুজের এক কোণ ৬০° হইলে অপর কোণের পরিমাণ কত?

৪। ABC ত্রিভুজের A + B = C হইলে C এর পরিমাণ কত ডিগ্রী?

৫। যে ত্রিভুজের এক কোণ সূক্ষ্মকোণ তাহাকে 'সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ' বলিলে কি দোষ হয়?

৬। সমকোণী ত্রিভুজের কয়টি কোণ সমকোণ?

৭। স্থূলকোণী ত্রিভুজের কয়টি কোণ স্থূলকোণ?

৮। সমকোণী ত্রিভুজের এক কোণ স্থূলকোণ হইতে পারে কি?

৯। স্থূলকোণী ত্রিভুজের কয়টি সূক্ষ্মকোণ?

অনুশীলনী ৫

১। একটি ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুটির পরিমাণ ৫০° ও ৬০° হইলে উহার শিরঃকোণের পরিমাণ কত ডিগ্রী?

২। ত্রিভুজের এক কোণ শিরঃকোণের দ্বিগুণ এবং অপর কোণ শিরঃকোণের তিন গুণ হইলে, উহার প্রত্যেক কোণের পরিমাণ কত?

৩। ABC একটি ত্রিভুজের BC ভূমি D পর্যন্ত বর্ধিত করিলে যদি ∠ACD = ১০৮° এবং ∠ABC = ৩৬° হয় তবে অবশিষ্ট প্রত্যেক কোণের পরিমাণ কত ?

৪। ত্রিভুজের কোনও বাহু বর্ধিত না করিয়া উপপাদ্য ১৩, সপ্রমাণ কর।

[শীর্ষ দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টান।]

৫। সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের যে কোনও দুই কোণ একত্রযোগে উহার তৃতীয় কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

৬। কোন ত্রিভুজের যে কোনও দুই কোণ একত্রযোগে উহার তৃতীয় কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী হইবে।

৭। চতুর্ভুজের সমস্ত অন্তঃকোণের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

৮। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্ব টানিলে উৎপন্ন ত্রিভুজ দুটি পরস্পর সদৃশকোণ হইবে এবং উহাদের প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ হইবে।

৯। যে ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুটি পরস্পর সমান তাহার শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক ভূমির উপর লম্ব হইবে।

১০। কোন ত্রিভুজের দুই কোণ সমান হইলে, উহার তৃতীয় কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক সমান কোণ দুটির সংলগ্ন বাহুর সমান্তরাল হইবে।

১১। কোন ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন এক কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং অপর কোণের বহির্দ্বিখণ্ডকের অন্তর্ভূত কোণ উহার শিরঃকোণের অর্ধেক।

১২। কোন ত্রিভুজের ভূমি উভয় দিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃ-কোণ দুটি একত্রযোগে দুই সমকোণ অপেক্ষা উহার শিরঃকোণ পরিমাণ বেশি হইবে।

১৩। ABC একটি ত্রিভুজের B ও C কোণের দ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে ছেদ করিলে,

$$\angle BOC = ৯০^\circ + \frac{A}{২} \text{ হইবে।}$$

১৪। ABC একটি ত্রিভুজের AB এবং AC বাহু যথাক্রমে B ও C এর দিকে বর্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ দুটি উৎপন্ন হয় তাহাদের দ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে ছেদ করিলে,

$$\angle BOC + \frac{A}{২} = ৯০^\circ \text{ হইবে।}$$

১৫। কোন সুষম বহুভুজের বাহুগুলি ক্রমান্বয়ে একই দিকে বর্ধিত করিলে যদি উৎপন্ন বহিঃকোণের প্রত্যেকটি (১) ৯°, (২) ১২°, (৩) ৩৬°, (৪) ৪৫°, অথবা (৫) ৬০° হয়, তবে উহার বাহুসংখ্যা কত?

১৬। কোন চতুর্ভুজের তিন কোণ যথাক্রমে ৭৫°, ৮০½° এবং ১৩৫° হইলে, উহার চতুর্থ কোণের পরিমাণ কত?

১৭। নিম্নলিখিত ক্ষেত্রসমূহের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ কত?

(১) সুষম ষড়ভুজ (২) সুষম অষ্টভুজ।
(৩) সুষম দশভুজ (৪) সুষম পঞ্চদশভুজ।

১৮। কোন সুষম বহুভুজের প্রত্যেক কোণ (১) ১৫৬°, (২) ১৬০°, (৩) ১৬২° বা (৪) ১৬৫° হইলে, উহার বাহুসংখ্যা কত?

১৯। ABCD একটি চতুর্ভুজের A ও B কোণের দ্বিখণ্ডক দুটি O বিন্দুতে ছেদ করিলে, AOB কোণ, C ও D কোণের সমষ্টির অর্ধেক হইবে।

২০। দুই সরলরেখার অন্তর্ভূত সূক্ষ্ম (বা স্থুল) কোণ উহাদের পরস্পরের লম্বদ্বয়ের অন্তর্ভূত সূক্ষ্ম (বা স্থুল) কোণের সমান।

২১। একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলি ক্রমান্বয়ে একই দিকে বর্ধিত করিলে যদি উৎপন্ন বহিঃকোণগুলির সমষ্টি (১) অন্তঃকোণের গুলির সমষ্টির অর্ধেকের, (২) অন্তঃকোণ গুলির সমষ্টির, অথবা (৩) অন্তঃকোণ গুলির সমষ্টির দ্বিগুণের, সমান হয়, তবে উহার বাহুসংখ্যা কত?

২২। ABCDE একটি সুষম পঞ্চভুজের AC ও AD সংযুক্ত করা হইলে; প্রমাণ কর যে, ACD একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে এবং উহার ভূমি-সংল প্রগ্নত্যেক কোণ শিরঃকোণের দ্বিগুণ হইবে।

২৩। কোন সুষম ষড়ভুজের প্রত্যেক বাহু উহার বিপরীত বাহুর সমান্তরাল।

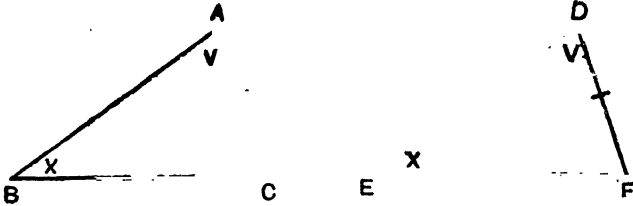
২৪। ABC একটি ত্রিভুজের BC ভূমি সংলগ্ন কোণ দুটি সমান এবং BO ও CO যথাক্রমে ঐ কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক। BO বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণ ABC ত্রিভুজের যে কোনও ভূমি-সংলগ্ন কোণের সমান হইবে।

ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ

ত্রিভুজ (দ্বিতীয় বার)

[এখানে শিক্ষার্থিগণ প্রথম অধ্যায়ের ১৫ হইতে ২৪ উদাহরণের পুনরালোচনা করিবে।]

উপপাদ্য ১৫

যদি এক ত্রিভুজের দুই কোণ যথাক্রমে অপর এক ত্রিভুজের দুই কোণের সমান হয় এবং একের এক বাহুও অপরের অনুরূপ বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হইবে।

মনে কর, ABC, DEF ত্রিভুজ দুটির মধ্যে,

$$\angle A = \angle D,$$
$$\angle B = \angle E$$

এবং AC বাহু = অনুরূপ DF বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC, DEF ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

প্রমাণ : $\angle A + \angle B + \angle C =$ ২ সম $\angle$ (উপ ১৩)

$$= \angle D + \angle E + \angle F.$$

কিন্তু দেওয়া আছে যে, $\angle A = \angle D$ এবং $\angle B = \angle E$.

$$\therefore \quad \angle C = \angle F.$$

এখন ABC ত্রিভুজটিকে মনে মনে তুলিয়া DEF ত্রিভুজের উপর এইরূপভাবে রাখ যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং AC বাহু DF বাহুর উপর পড়ে।

তাহা হইলে, C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে, কারণ AC = DF ;

আবার, AB বাহু DE বাহুর উপর পড়িবে, কারণ $\angle A = \angle D$;

এবং CB বাহু FE বাহুর উপর পড়িবে, কারণ $\angle C = \angle F$;

এখন AB, DE এর উপর এবং CB, FE এর উপর পড়ায়,

B বিন্দু E বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে।

∴ ABC ত্রিভুজ DEF ত্রিভুজের সহিত সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

অর্থাৎ ABC, DEF ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হইবে।

অনুশীলনী ৬

১। ABC, DEF দুটি ত্রিভুজের $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ এবং BC = EF হইলে, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হইবে।

২। যে ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুটি পরস্পর সমান তাহার শীর্ষ হইতে ভূমির উপর পাতিত লম্ব, শিরঃকোণ এবং ভূমিকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

৩। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক ভূমির উপর লম্ব হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

৪। একটি কোণের দ্বিখণ্ডকের অন্তর্গত কোনও বিন্দু হইতে উহার বাহুদ্বয়ের উপর পাতিত লম্ব দুটি পরস্পর সমান হইবে।

৫। AOB কোণের দ্বিখণ্ডকের অন্তঃস্থ কোনও P বিন্দু হইতে PL ও PM যথাক্রমে BO এবং OA এর সমান্তরাল করিয়া টানিলে উহারা যেন OA এবং OBকে যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ছেদ করিল, প্রমাণ কর যে, LOP, MOP ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

৬। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা AB এর মধ্যবিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে কোনও সরলরেখার উপর A ও B হইতে AP ও BQ লম্ব টানা হইলে; প্রমাণ কর যে, AP = BQ.

৭। ABC একটি ত্রিভুজের $\angle B = \angle C$; যদি B ও C কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক দুটি AC ও ABকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, BD = CE.

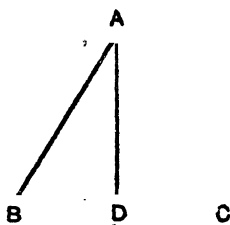
৮। AB একটি সরলরেখা অপর দুই সমান্তরাল সরলরেখার সহিত A ও B বিন্দুতে মিলিত হইল। ABএর মধ্য বিন্দু O দিয়া যে কোন সরলরেখা টানিলে উহা যদি সমন্তরাল রেখা দুটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, O বিন্দুতে CD দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৯। একটি ত্রিভুজের যে কোনও দুই কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক I বিন্দুতে ছেদ করিলে ; প্রমাণ কর যে, I হইতে ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর পাতিত লম্ব তিনটি পরস্পর সমান হইবে।

১০। ABC একটি ত্রিভুজের AB ও AC বাহু D ও E পর্যন্ত বর্ধিত করিলে যদি DBC ও ECB কোণের দ্বিখণ্ডক দুটি F বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, F হইতে AD ও AEএর উপর পাতিত লম্ব দুটি পরস্পর সমান হইবে।

১১। একজন আমীন কোন নদীর পরপারে না গিয়াই উহার প্রস্থ স্থির করিবার ইচ্ছা করিল এবং নদীর ঠিক পরপারে অবস্থিত কোনও পদার্থ Bকে লক্ষ্য করিয়া, নদীর এ পারে Bএর সোজাসুজি A একটি বিন্দু লইল এবং A হইতে ABএর উপর AC একটি লম্ব টানিয়া ACএর মধ্যবিন্দু O চিহ্নিত করিল। পরে C বিন্দু হইতে ACএর উপর লম্ব টানিয়া ঐ লম্বের উপর এমন একটি D বিন্দু চিহ্নিত করিল যেন D হইতে O ও B একই সরলরেখায় অবস্থিত দেখা যায়। এখন CDএর দৈর্ঘ্য মাপিল। প্রমাণ কর যে, CD ঐ নদীর প্রস্থের সমান হইবে।

উপপাদ্য ১৬

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ দুটি পরস্পর সমান।

মনে কর ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, ইহার AB বাহু = AC বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ABC = \angle ACB$.

প্রমাণ। BAC কোণকে দ্বিখণ্ডিত করিয়া AD সরলরেখা টান। AD রেখা যেন BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন ABD, ACD ত্রিভুজের মধ্যে,

যেহেতু { AB = AC, AD বাহু সাধারণ,
এবং অন্তর্ভূত $\angle BAD$ = অন্তর্ভূত $\angle CAD$.

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ; $\therefore \quad \angle ABC = \angle ACB$.

বিকল্প প্রমাণ (Alternative Proof)

মনে মনে ABC ত্রিভুজটিকে AD রেখা ক্রমে ভাঁজ কর।

এখন, AC বাহু AB বাহুর উপর পড়িবে, কারণ $\angle DAC = \angle DAB$.

আবার, AC = AB বলিয়া, C বিন্দু B বিন্দুর উপর পড়িবে ;

অতএব DC, DBএর উপর পড়িবে ;

$\therefore$ ABD, ACD ত্রিভুজ দুটি সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

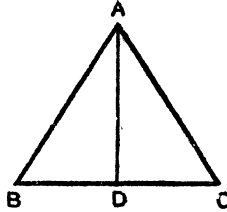
অতএব, $\angle ABC = \angle ACB$

অনু ১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয় বর্ধিত হইলে, ভূমি-সংলগ্ন বহিঃকোণ দুটি পরস্পর সমান হইবে।

কারণ, ইহারা সমান সমান কোণের সম্পূরক।

অনু ২। সমবাহু ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান।

উপপাদ্য ১৭

কোন ত্রিভুজের দুইকোণ পরস্পর সমান হইলে, সমান সমান কোণের বিপরীত বাহু দুটিও পরস্পর সমান হইবে।

মনে কর ABC ত্রিভুজের $\angle ABC = \angle ACB$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB বাহু = AC বাহু।

মনে কর, BC এর উপর AD লম্ব ; এবং D, BC ও ADএর ছেদবিন্দু।

প্রমাণ। এখন ABD, ACD ত্রিভুজের মধ্যে,

যেহেতু $\begin{cases} \angle ABD = \angle ACD \\ \angle ADB = \angle ADC, \text{ সমকোণ বলিয়া,} \\ \text{এবং } AD \text{ বাহু সাধারণ,} \end{cases}$

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। $\therefore$ AB বাহু = AC বাহু।

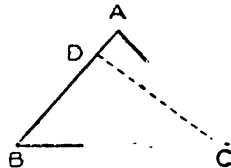
বিকল্প প্রমাণ।

যদি AB বাহু AC বাহুর সমান না হয়, তবে মনে কর যেন AB বাহু AC বাহু অপেক্ষা বড়।

AB হইতে AC এর সমান করিয়া BD অংশ কাট ; CD সংযুক্ত কর।

এখন DBC ও ABC ত্রিভুজের মধ্যে,

যেহেতু $\begin{cases} BC \text{ বাহু সাধারণ, } BD = CA \\ \text{এবং অন্তর্ভূত } \angle DBC = \text{অন্তর্ভূত } \angle ACB. \end{cases}$

অতএব এই ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। কিন্তু তাহা হইতে পারে না,

কারণ, DBC ত্রিভুজ ABC ত্রিভুজের অংশমাত্র।
অতএব AB ও AC অসমান নহে, অর্থাৎ AB = AC.

অনু। কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণ পরস্পর সমান হইলে তাহা সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।

দ্রষ্টব্য ১। ইহা যোড়শ উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা।

দ্রষ্টব্য ২। কাগজ ভাঁজ প্রণালীতে, AD রেখাক্রমে ভাঁজ করিয়া এই উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যাইতে পারে; কারণ $\angle BAD = \angle CAD$ (উপ ১৩, অনু ২)। শিক্ষার্থিগণ ঐ প্রণালীতে প্রমাণ করিবে।

সংজ্ঞা। ত্রিভুজের কোনও শীর্ষের সহিত উহার বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুসংযোজক সরলরেখাকে **মধ্যমা** (Median) বলে।

যথা, উপপাদ্য ১৭এর চিত্রে ABC ত্রিভুজের AD একটি মধ্যমা।

মন্তব্য। একটি ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা আছে।

সংজ্ঞা। একটি চিত্রকে কোনও সরলরেখা ক্রমে ভাঁজ করিলে যদি ঐ রেখার উভয় পার্শ্বের চিত্রাংশ পরস্পর সর্বতোভাবে মিলিয়া যায়, তবে উক্ত চিত্র ঐ রেখার সহিত **প্রতিসম** (symmetrical) হইল বলা হয় এবং সরলরেখাটিকে ঐ চিত্রের **প্রতিসাম্য-অক্ষ** (Axis of Symmetry) বলা হয়।

অনুসিদ্ধান্ত। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উহার শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডকের সহিত প্রতিসম হইবে।

অনুশীলনী ৭

১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে, উহা শীর্ষস্থ বহিঃকোণকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

২। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের এক বাহু শীর্ষ দিয়া বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণ ভূমি-সংলগ্ন প্রত্যেক কোণের দ্বিগুণ হইবে।

৩। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক উহার ভূমির সমান্তরাল হইবে।

৪। কোন দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ দুটি পরস্পর সমান হইলে উহাদের অবশিষ্ট চারি কোণ পরস্পর সমান হইবে।

৫। ABCD একটি চতুর্ভুজের AC কর্ণ A ও C কোণকে দ্বিখণ্ডিত করিলে, উহা BD কর্ণের উপর লম্ব হইবে।

৬। ABC, DBC দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একই ভূমি BC। প্রমাণ কর যে,

(১) $\angle ABD = \angle ACD$

এবং (২) AD বা বর্ধিত AD BCকে লম্বভাবে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

৭। রম্বসের বিপরীত কোণ দুটি উহাদের শীর্ষ-সংযোজক কর্ণ দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয়।

৮। রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে দ্বিখণ্ডিত হয়।

৯। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণ দ্বিখণ্ডিত করিয়া বিপরীত বাহু পর্যন্ত যে সরলরেখা দুটি টানা যায় তাহারা পরস্পর সমান।

১০। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্ব দুটি সমান।

১১। কোনও বৃত্তের ব্যাস AB এবং C উহার পরিধিস্থ কোন এক বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে $\angle ACB =$ এক সমকোণ।

১২। সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

১৩। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমির মধ্যে D ও E এমন দুটি বিন্দু লও যেন $BD = CE$ হয়। এখন প্রমাণ কর যে, $AD = AE$

১৪। ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর অন্তর্গত যথাক্রমে D, E, F তিনটি বিন্দু। যদি $BD = CE = AF$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, DEF একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

১৫। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর DBC, ECA, FAB সমবাহু ত্রিভুজ তিনটি অঙ্কিত হইলে, প্রমাণ কর যে, DEF একটি সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।

১৬। ABCD একটি সমবাহু চতুর্ভুজ; প্রমাণ কর যে,

(১) ইহার বিপরীত কোণগুলি সমান,

(২) ইহার বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল।

১৭। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB, AC সমান বাহু দুটি যথাক্রমে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত হইল। যদি AD = AE হয় এবং CD ও BE সংযুক্ত করা যায়, তবে প্রমাণ কর যে,

(১) ABE, ACD ত্রিভুজ দুটি সর্বসম,

(২) CBE, BCD ত্রিভুজ দুটি সর্বসম,

এবং ইহা হইতে দেখাও যে, $\angle ABC = \angle ACB$.

[ইহা ইউক্লিড প্রদত্ত ষোড়শ উপপাদ্যের প্রমাণ]

১৮। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন B ও C কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক দুটি O বিন্দুতে ছেদ করিলে, OBC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

১৯। ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে উহা যদি AB ও AC অথবা বর্ধিত AB ও ACকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, ADE একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

২০। কোনও ত্রিভুজের শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক উহার ভূমির সমান্তরাল হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

২১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক দুটির (অথবা বহির্দ্বিখণ্ডক দুটির) ছেদবিন্দুর সহিত ত্রিভুজের শীর্ষ সংযোজক রেখা শিরঃকোণকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

২২। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমি-সংলগ্ন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক দুটি P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডক দুটি Q বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, A, P ও Q ইহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

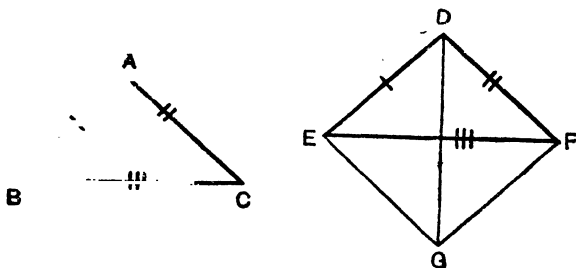
২৩। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB, AC সমান বাহু দুটি D ও E পর্যন্ত বর্ধিত হইল যেন AD = AE ; যদি BE ও CD পরস্পর F বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে BF = CF.

২৪। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের কোনও এককোণ ৬০° হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

২৫। ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AB এর উপর D একটি বিন্দু। যদি $\angle DAC = \angle DCA$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, AD = CD = BD.

ইহা হইতে প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-দ্বিখণ্ডকারী মধ্যমা অতিভুজের অর্ধেক।

উপপাদ্য ১৮

যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের তিন বাহু যথাক্রমে অন্যের তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হইবে।

মনে কর ABC ও DEF ত্রিভুজের মধ্যে,

AB = DE,

AC = DF,

এবং BC = EF.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC ও DEF ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

প্রমাণ। মনে কর যেন ABC ত্রিভুজের BC বাহু অপর দুই বাহুর কোনটি অপেক্ষা ছোট নহে।

এখন, ABC ত্রিভুজটি তুলিয়া DEF ত্রিভুজের উপর এরূপ ভাবে রাখ যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়ে, BC বাহু EF বাহুর উপর পড়ে এবং EF বাহুর যে পার্শ্বে D বিন্দু তাহার বিপরীত পার্শ্বে A বিন্দু পড়ে। তাহা হইলে BC = EF বলিয়া, C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে।

মনে কর, এইরূপে ABC ত্রিভুজটি রাখিলে, A বিন্দু যেন G বিন্দুর উপর পড়িল, অর্থাৎ △ EGF, ABC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান হইল।

তাহা হইলে GE = AB, GF = AC এবং ∠EGF = ∠BAC.

DG সংযুক্ত কর।

এখন DEG ত্রিভুজের, DE = AB = GE

∴ ∠EGD = ∠EDG

আবার, DFG ত্রিভুজের DF বাহু = GF বাহু বলিয়া,

∠DGF = ∠GDF.

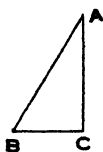
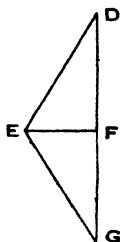
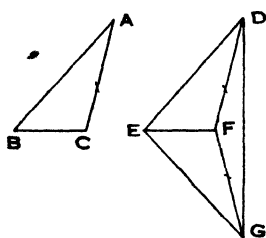
অতএব সম্পূর্ণ ∠EGF = সম্পূর্ণ ∠EDF.

অর্থাৎ ∠BAC = ∠EDF.

এখন ABC ও DEF ত্রিভুজের মধ্যে,

যেহেতু { AB বাহু = DE বাহু,
AC বাহু = DF বাহু,
এবং অন্তর্ভূত ∠BAC = অন্তর্ভূত ∠EDF.

অতএব ABC ও DEF ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। (উপ ৪)

বিশেষ দ্রষ্টব্য ১। ১৮শ প্রতিজ্ঞায় তিনটি পক্ষ উপস্থিত হইতে পারে। যথা, (১) DG রেখা EDF ও EGF কোণ দুটির মধ্যে পড়িতে পারে, (যেমন মূল প্রতিজ্ঞার চিত্রে) (২) DG রেখা ঐ দুটি কোণের বাহিরে পড়িতে পারে, (যেমন ২য় চিত্রে) অথবা (৩) DG রেখা DE ও EG রেখা দুটির সহিত অথবা DF ও FG রেখা দুটির সহিত মিলিয়া যাইতে পারে (যেমন ১ম চিত্রে)। কিন্তু BC বাহু

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র)

ত্রিভুজের অন্য কোনও বাহু অপেক্ষা ছোট না হইলে, DG রেখা সর্বদাই EDF ও EGF কোণ দুটির মধ্যে পড়িবে। সুতরাং এই

অবস্থাতে কেবল এক পক্ষের প্রমাণই যথেষ্ট; অন্যথা, উক্ত তিন পক্ষেরই প্রমাণের আবশ্যকতা আছে।

দ্রষ্টব্য ২। উপরিউক্ত প্রতিজ্ঞায় $\triangle^s$ ABC, DEF সর্বসম হওয়াতে;

(১) $\angle A = \angle D$,

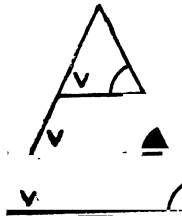
(২) $\angle B = \angle E$,

(৩) $\angle C = \angle F$

এবং (৪) $\triangle ABC$ এর কালি = $\triangle DEF$ এর কালি।

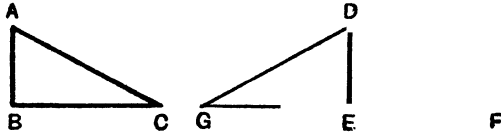
এখানে বিশেষরূপে লক্ষ্য করিতে হইবে যে, ঐ দুই ত্রিভুজের যে সকল বাহু পরস্পর সমান দেওয়া আছে, তাহাদের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান প্রমাণ করা হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য ৩। উল্লিখিত দ্রষ্টব্য ২ হইতে এই সিদ্ধান্ত করা যায় যে, কোন ত্রিভুজের তিন বাহু যথাক্রমে অপর এক ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হইলে ঐ ত্রিভুজ দুটির একের তিন কোণ যথাক্রমে অপরের তিন কোণের সমান হইবে।

কিন্তু ইহার বিপরীত প্রতিজ্ঞা যথা—'যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের তিন কোণ যথাক্রমে অপরের তিন কোণের সমান হয়, তবে একের তিন বাহু যথাক্রমে অপরের তিন বাহুর সমান হইবে। ইহা সত্য নাও হইতে পারে। কারণ নিম্নের চিত্র হইতে দেখা যাইবে যে, এক ত্রিভুজের

তিন কোণ অপর ত্রিভুজের তিন কোণের সমান হইলেও একের তিন বাহু যথাক্রমে অন্যের তিন বাহুর সমান হয় না।

[শিক্ষার্থিগণ এখানে প্রথম অধ্যায়ের ২৯ হইতে ৩১ উদাহরণের পুনরালোচনা করিবে।]

উপপাদ্য ১৯

যদি দুটি সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যে একের অতিভুজ অপরের অতিভুজের সমান এবং একের অন্য এক বাহু অপরের অন্য এক বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হইবে।

মনে কর, ABC, DEF সমকোণী ত্রিভুজ দুটির, ∠B ও ∠E সমকোণ, ইহাদের

অতিভুজ AC = অতিভুজ DF

এবং AB বাহু = DE বাহু

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC, DEF ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

প্রমাণ। ABC ত্রিভুজটিকে তুলিয়া DEF ত্রিভুজের সহিত এইরূপ ভাবে রাখ যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর পড়ে, AB বাহু, DE বাহুর উপর পড়ে এবং DEএর যে পার্শ্বে F বিন্দু তাহার বিপরীত পার্শ্বে A বিন্দু পড়ে।

এখন AB = DE বলিয়া, B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়িবে।

মনে কর এইরূপে ABC ত্রিভুজটি রাখিলে C বিন্দু, G বিন্দুর উপর পড়িল, অর্থাৎ DEG, ABC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান হইল।

স্থতরাং DG = AC, ∠DGE = ∠ACB

এবং ∠DEG = ∠ABC = এক সমকোণ।

এখন, যেহেতু DEG, ও DEF সন্নিহিত কোণ দুটি একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান,

∴ EF ও EG একই সরলরেখায় অবস্থিত। (উপ ২)

অতএব DGF একটি ত্রিভুজ, ইহার $DF = AC = DG$

$\therefore \quad \angle DGE = \angle DFE$ (উপ ১৬)

আবার, $\angle DGE = \angle ACB$

$\therefore \quad \angle ACB = \angle DFE$

এখন ABC ও DEF ত্রিভুজের মধ্যে,

যেহেতু
- $\angle ACB = \angle DFE$ (প্রমাণিত)
- $\angle ABC = \angle DEF$ (সমকোণ বলিয়া)
- এবং AB বাহু = অনুরূপ DE বাহু,

অতএব, ABC, DEF ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। (উপ ১৫)

অনুশীলনী ৮

১। যে সকল সমবাহু ত্রিভুজের ভূমি সমান তাহারা পরস্পর সর্বসম।

২। ABC, DBC দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একই ভূমি BC হইলে, (অষ্টাদশ উপপাদ্যের সাহায্যে) প্রমাণ কর যে, $\angle ABD = \angle ACD$।

৩। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষের সহিত ভূমির মধ্যবিন্দুসংযোজক সরলরেখা, শিরঃকোণকে দ্বিখণ্ডিত করিবে এবং উহা ভূমির উপর লম্ব হইবে।

৪। A, B, C ও D কোন বৃত্তের পরিধিস্থ চারিটি বিন্দু এবং O বৃত্তের কেন্দ্র। যদি $AB = CD$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, OAB ও OCD ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হইবে।

৫। দুটি বৃত্ত পরস্পর দুই বিন্দুতে ছেদ করিলে, উহাদের কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখা ঐ দুই ছেদবিন্দু সংযোজক সরলরেখাকে লম্বভাবে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

৬। কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান হইলে (১) যে কোনও কর্ণ উহাকে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করিবে, (২) বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল হইবে এবং (৩) কর্ণদ্বয় পরস্পর দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৭। প্রমাণ কর যে, একই ভূমির উপর এবং উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত দুটি সমবাহু ত্রিভুজ হইতে পারে না।

৮। ABCD একটি চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান। যদি AC ও BD কর্ণদুটি সমান হয়, তবে উহার প্রত্যেক কোণই সমকোণ হইবে।

৯। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর পাতিত লম্ব ত্রিভুজটিকে দ্বিখণ্ডিত করে।

১০। AOB কোণের অন্তঃস্থ কোনও P বিন্দু হইতে OA ও OB বাহুর উপর পাতিত লম্ব দুটি সমান হইলে, OP সরলরেখা AOB কোণকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

১১। একটি ত্রিভুজের কোনও বাহুর মধ্যবিন্দু হইতে অন্য দুই বাহুর উপর পাতিত লম্ব দুটি সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

১২। একটি ত্রিভুজের কোন বাহুর প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হইতে অপর দুই বাহুর উপর পাতিত লম্ব দুটি সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

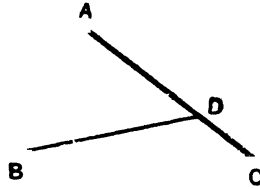
১৩। কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্ব তিনটি পরস্পর সমান হইলে, ত্রিভুটি সমবাহু হইবে।

১৪। ABC, DEF দুটি ত্রিভুজের AB=DE, AC=DF এবং A হইতে BCএর উপর পাতিত লম্ব, D হইতে EFএর উপর পাতিত লম্বের সমান হইলে প্রমাণ কর যে, ABC, DEF ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হইবে।

১৫। যে সরলরেখা কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণকে দ্বিখণ্ডিত করে, তাহা উহার ভূমিকেও দ্বিখণ্ডিত করিলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

[শিক্ষার্থিগণ এখানে প্রথম অধ্যায়ের ২৫ হইতে ২৮ এবং ৩২ উদাহরণের পুনরালোচনা করিবে।]

উপপাদ্য ২০

কোন ত্রিভুজের দুইবাহু অসমান হইলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

মনে কর ABC ত্রিভুজের AC বাহু, AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC কোণ ACB কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

অঙ্কন। AC বাহু হইতে AB বাহুর সমান AD অংশ কাটিয়া লও। BD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। এখন, ABD ত্রিভুজের AB বাহু AD বাহুর সমান বলিয়া,

$\angle ABD = \angle ADB$ (উপ ১৬)

কিন্তু $\angle ABC > \angle ABD$

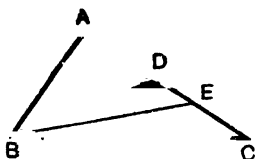
$\therefore \angle ABC > \angle ADB$

কিন্তু BCD ত্রিভুজের বহিঃ $\angle ADB$ বিপরীত অন্তঃ $\angle DCB$ অপেক্ষা বড় ;

অর্থাৎ $\angle ADB > \angle ACB$

$\therefore \angle ABC > \angle ACB$

উপপাদ্য ২১

ত্রিভুজের দুই কোণ অসমান হইলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

মনে কর ABC ত্রিভুজের ABC কোণ, ACB কোণ অপেক্ষা বড়।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AC বাহু, AB বাহু অপেক্ষা বড়।

অঙ্কন। এমন একটি BD সরলরেখা টান যেন ABD কোণ, ACB কোণের সমান হয়, BD যেন AC এর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল।

মনে কর, DBC কোণ BE দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইল এবং BE, AC এর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইল।

প্রমাণ। $\angle ABE = \angle ABD + \angle DBE$

$= \angle ACB + \angle CBE = \angle AEB$ (উপ ১৩, অনু ১)

$\therefore$ $AE = AB$ (উপ ১৭)

কিন্তু $AC > AE$; অতএব $AC > AB$

ইউক্লিড প্রদত্ত প্রমাণ

প্রমাণ। যদি AC, AB অপেক্ষা বড় না হয়, তবে AC ABএর সমান কিংবা AB অপেক্ষা ছোট হইবেই।

এখন দেখ AC AB এর সমান হইতেই পারে না, কারণ তাহা হইলে $\angle ABC = \angle ACB$ হইবে, কিন্তু ইহা কল্পনাবিরুদ্ধ। (উপ ১৬)

$\therefore$ AC, AB এর সমান নহে।

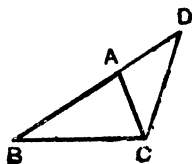
আবার দেখ AC AB অপেক্ষা ছোট হইতেই পারে না, কারণ তাহা হইলে, ABC কোণ ACB কোণ অপেক্ষা ছোট হইত, (উপ ২০) কিন্তু ইহা কল্পনাবিরুদ্ধ। সুতরাং AC AB অপেক্ষা ছোট নহে।

অতএব AC ABএর সমানও নহে, কিংবা AB অপেক্ষা ছোটও নহে।

সুতরাং AC AB অপেক্ষা বড়।

দ্রষ্টব্য। উপপাদ্য ২০ ও ২১ এই দুটি পরস্পর বিপরীত প্রতিজ্ঞা।

উপপাদ্য ২২

ত্রিভুজের যে কোনও দুই বাহুর **সমষ্টি** তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, (১) $AB+AC > BC$

(২) $BC+BA > CA$,

এবং (৩) $CA+CB > AB$.

(১) **অঙ্কন**। BA বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন AD, AC এর সমান হয়।

প্রমাণ। CAD ত্রিভুজের AD বাহু AC বাহু সমান বলিয়া,

$\angle ACD = \angle ADC$ (উপ ১৬)

কিন্তু BCD কোণ ACD কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

$\therefore \quad \angle BCD > \angle ADC$

অর্থাৎ BCD কোণ BDC কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

$\therefore \quad BD > BC$ (উপ ২১)

কিন্তু, $BD = BA + AD = AB + AC$

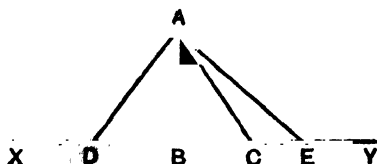
$\therefore \quad AB+AC > BC$.

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে,

(২) $BC+BA > AC$; (৩) $CA+CB > AB$.

দ্রষ্টব্য। অষ্টম পৃষ্ঠার তৃতীয় স্বতঃসিদ্ধ হইতে দেখা যায় যে, দুই বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাই বিন্দুদ্বয়ের ক্ষুদ্রতম দূরত্ব। অতএব ঐ স্বতঃসিদ্ধ হইতে স্পষ্টই $AB+AC > BC$.

উপপাদ্য ২৩

কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার বহিঃস্থ এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখা পর্যন্ত যতগুলি সরলরেখা টানা যাইতে পারে, তাহাদের মধ্যে লম্ব রেখাটি ক্ষুদ্রতম।

মনে কর, XY একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। আরও মনে কর, XY এর উপর AB লম্ব এবং AC, A হইতে XY পর্যন্ত অন্য যে কোনও একটি সরল রেখা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB, AC অপেক্ষা ছোট।

প্রমাণ। ABC ত্রিভুজের অন্তঃ $\angle$ ACB উহার বহিঃ $\angle$ ABX অপেক্ষা ছোট ; কিন্তু সমকোণ বলিয়া, $\angle ABC = \angle ABX$

$\therefore$ $\angle$ACB, $\angle$ABC অপেক্ষা ছোট।

অতএব, AB AC অপেক্ষা ছোট।

অনু ১। যে দুটি AC ও AD সরলরেখা AB এর সহিত পরস্পর সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাহারা পরস্পর সমান।

কারণ, $\because$ $\begin{cases} \angle ABC = \angle ABD \\ \angle BAC = \angle BAD \end{cases}$ (সমকোণ বলিয়া) / (কল্পনা) এবং AB বাহু সাধারণ।

অতএব, ABC, ABD ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। $\therefore$ $AC = AD$.

অনু ২। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এক নির্দিষ্ট সরলরেখা পর্যন্ত কেবলমাত্র দুটি পরস্পর সমান সরলরেখা টানা যাইতে পারে।

অনু ৩। যদি AB এর সহিত AC সরলরেখা AE সরলরেখা অপেক্ষা ছোট কোণ উৎপন্ন করে, তবে AC, AE অপেক্ষা ছোট হইবে।

কারণ ACB একটি সূক্ষ্মকোণ, অতএব ACE একটি স্থূলকোণ।

∴ AEC সূক্ষ্মকোণ, ACE স্থূলকোণ অপেক্ষা ছোট।

∴ AC, AE অপেক্ষা ছোট।

অনু ৪। A হইতে XY পর্যন্ত যতগুলি সরলরেখা টানা যায়, তাহাদের মধ্যে AB ক্ষুদ্রতম হইলে AB, XY এর লম্ব।

ইহা মূল প্রতিজ্ঞার বিপরীত।

দ্রষ্টব্য। কোন সরলরেখা হইতে কোন এক বিন্দুর **দূরত্ব** বলিলে ঐ বিন্দু হইতে সরলরেখার উপর যে লম্ব টানা যায় তাহার দৈর্ঘ্য বুঝায়।

অনুশীলনী ৯

১। ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণটি বৃহত্তম।

বিপরীত ক্রমে, ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণের বিপরীত বাহুটি বৃহত্তম।

২। ABCD চতুর্ভুজের, AB বৃহত্তম এবং CD ক্ষুদ্রতম বাহু হইলে; প্রমাণ কর যে, BCD কোণ BAD কোণ অপেক্ষা এবং CDA কোণ, CBA কোণ অপেক্ষা বড় হইবে।

৩। কোন ত্রিভুজের দুই বাহু অসমান হইলে, ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ সূক্ষ্মকোণ হইবে।

৪। কোন ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু সংলগ্ন দুই কোণই সূক্ষ্মকোণ।

৫। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ অপর কোনও বাহু অপেক্ষা বড়।

৬। স্থূলকোণী ত্রিভুজের, স্থূলকোণের বিপরীত বাহুটি বৃহত্তম।

৭। ত্রিভুজের কোনও দুই বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ছোট।

৮। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষের সহিত ভূমির কোনও বিন্দুসংযোজক সরলরেখা উহার সমান বাহু দুটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

৯। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ, উহার যে মধ্যমা অতিভুজকে দ্বিখণ্ডিত করে তাহার দ্বিগুণ।

১০। ABC ত্রিভুজের মধ্যে O কোন এক বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$AB+AC+BC > OA+OB+OC$$

১১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষের সহিত বর্ধিত ভূমির কোনও বিন্দু সংযোজক সরলরেখা উহার যে কোনও সমবাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

১২। ABC একটি ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু BC এর উপর A হইতে

AD লম্ব হইলে প্রমাণ কর যে, (১) BD অপেক্ষা AB বৃহত্তর (২) CD অপেক্ষা AC বৃহত্তর এবং (৩) AB ও AC একত্রযোগে BC হইতে বড়।

১৩। ত্রিভুজের কোনও কোণ দ্বিখণ্ডিত করিয়া **উপপাদ্য ২২** সপ্রমাণ কর।

১৪। চতুর্ভুজের যে কোনও তিন বাহু একত্রযোগে উহার চতুর্থ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

১৫। চতুর্ভুজের পরিসীমা উহার কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

১৬। চতুর্ভুজের যে কোন দুটি বিপরীত বাহু একত্রযোগে উহার কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

১৭। চতুর্ভুজের কর্ণ দুটি একত্রযোগে উহার পরিসীমার অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর।

১৮। ABC একটি ত্রিভুজের ভিতরে O যে কোন বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে, OA, OB ও OC একত্রযোগে ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

১৯। একটি কোণের দ্বিখণ্ডকের অন্তর্গত যে কোনও বিন্দু উহার বাহু দুটি হইতে সমদূরবর্তী।

২০। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির মধ্য বিন্দু উহার অপর দুই বাহু হইতে সমদূরবর্তী।

২১। ত্রিভুজের যে কোনও দুই বাহুর সমষ্টি উহার তৃতীয় বাহুকে যে মধ্যমা দ্বিখণ্ডিত করে তাহার দ্বিগুণ অপেক্ষা বড়।

২২। ত্রিভুজের পরিসীমা উহার মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বড়।

২৩। ত্রিভুজের পরিসীমা মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টির দ্বিগুণ অপেক্ষা ছোট।

২৪। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দুই প্রান্তবিন্দু উহার সমবাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী।

২৫। একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য ২ ও ৩ একক হইলে, উহার তৃতীয় বাহু ৫ একক অপেক্ষা ছোট কিন্তু ১ একক অপেক্ষা বড় হইবে।

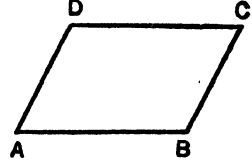
২৬। প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্ত একটি সরলরেখাকে দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

[কারণ, তাহা হইলে, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে ঐ রেখা পর্যন্ত দুইএর অধিক সমান সরলরেখা টানা যাইবে; কিন্তু তাহা অসম্ভব। উপ ২৩, অনু ২]

সপ্তম পরিচ্ছেদ

সামান্তরিক ও সমান্তরাল সরলরেখা

যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল তাহাকে **সামান্তরিক** (Parallelogram) বলে।

দ্রষ্টব্য। ABCD সামান্তরিককে AC অথবা BD সামান্তরিকও বলা হইয়া থাকে।

মন্তব্য। দেখিতে পাওয়া যাইবে যে, সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান।

যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে **আয়তক্ষেত্র** (Rectangle) বলে।

মন্তব্য। দেখিতে পাওয়া যাইবে যে, আয়তক্ষেত্রের চারিটি কোণই সমকোণ।

যে আয়তক্ষেত্রের দুটি সন্নিহিত বাহু পরস্পর সমান তাহাকে **বর্গক্ষেত্র** (Square) বলে।

মন্তব্য। দেখিতে পাওয়া যাইবে যে, বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং ইহার চারিটি কোণই সমকোণ।

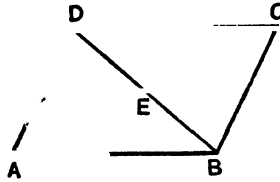
যে চতুর্ভুজের চারিটি বাহু পরস্পর সমান কিন্তু একটি কোণও সমকোণ নহে তাহাকে **রম্বস** (Rhombus) বলে।

মন্তব্য। দেখিতে পাওয়া যাইবে যে, রম্বস একটি সামান্তরিক।

যে চতুর্ভুজের কেবল দুইটি বাহু সমান্তরাল তাহাকে **ট্রাপিজিয়ম** (Trapezium) বলে।

[শিক্ষার্থিগণ এখানে প্রথম অধ্যায়ের ৪০ হইতে ৪৩ উদাহরণের পুনরালোচনা করিবে।]

উপপাদ্য ২৪

সামান্তরিকের (১) বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং বিপরীত কোণগুলিও পরস্পর সমান, (২) প্রত্যেক কর্ণ উহাকে দ্বিখণ্ডিত করে, এবং (৩) কর্ণদ্বয় পরস্পর দ্বিখণ্ডিত হয়।

মনে কর, ABCD একটি সামান্তরিক। AC ও BD ইহার কর্ণ এবং E, AC ও BDএর ছেদবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BAD = \angle BCD$

(২) $\Delta ABC = \Delta ACD$; $\Delta ABD = \Delta BCD$.

(৩) $AE = CE$, $BE = DE$.

প্রমাণ। (১) যেহেতু AD ও BC সমান্তরাল এবং AC উহাদিগকে ভেদ করিয়াছে ; $\therefore$ $\angle CAD =$ একান্তর $\angle ACB$.

আবার, যেহেতু AB ও CD সমান্তরাল এবং AC উহাদিকে ভেদ করিয়াছে ;

$\therefore$ $\angle ACD =$ একান্তর $\angle CAB$. (উপ ৯)

এখন ABC, CDA ত্রিভুজের মধ্যে

যেহেতু
- $\angle ACB = \angle CAD$ ... (প্রমাণিত)
- $\angle CAB = \angle ACD$ ... (প্রমাণিত)
- এবং AC বাহু সাধারণ।

$\therefore$ ABC, CDA ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ; (উপ ১৫)

অতএব $AB = CD$, $BC = DA$, $\angle ABC = \angle CDA$

প্রমাণ করা হইয়াছে যে, $\angle CAD = \angle ACB$ এবং $\angle CAB = \angle ACD$.

$\therefore \quad \angle CAD + \angle CAB = \angle ACB + \angle ACD$

$\therefore \quad \angle DAB = \angle BCD.$

(২) প্রমাণ করা হইয়াছে যে, ABC ও CDA ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

অতএব, ABCD সামান্তরিককে AC দ্বিখণ্ডিত করিল।

এইরূপে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, ABCD সামান্তরিককে BD দ্বিখণ্ডিত করে।

(৩) AEB, CED ত্রিভুজের মধ্যে

যেহেতু
- $\angle EAB = \angle ECD$ ... (প্রমাণিত)
- $\angle AEB =$ বিপ্রতীপ $\angle CED$
- এবং AB বাহু = অনুরূপ CD বাহু (প্রমাণিত)

$\therefore$ AEB, CED ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। (উপ ১৫)

অতএব, $AE = CE$, এবং $BE = DE$.

অনু ১। আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেক কোণই সমকোণ।

অনু ২। বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং প্রত্যেক কোণই সমকোণ।

অনুশীলনী ১০

১। যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান তাহা সামান্তরিক।

২। যে চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান, তাহা সামান্তরিক।

৩। যে চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর দ্বিখণ্ডিত হয়, তাহা সামান্তরিক।

১ হইতে ৩ উদাহরণগুলি উপপাদ্য ২৪এর বিপরীত।

৪। যদি কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান হয়, তবে তাহা রম্বস কিংবা বর্গক্ষেত্র হইবে।

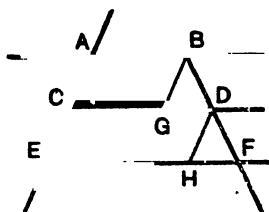
৫। যে চতুর্ভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান, তাহা আয়তক্ষেত্র।

৬। যে চতুর্ভুজ সুষম, তাহা বর্গক্ষেত্র।

৭। কোন রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে দ্বিখণ্ডিত হয়।

৮। যে সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান, তাহা আয়তক্ষেত্র।

উপপাদ্য ২৫

যদি তিন বা ততোধিক সমান্তরাল সরলরেখা উহাদের কোন ভেদক হইতে সমান সমান অংশ ছেদন করে তবে উহাদের অপর কোন ভেদক হইতেও সমান সমান অংশ ছেদন করিবে।

মনে কর, AB, CD ও EF তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা AE ভেদক হইতে AC ও CE অংশ এবং BF ভেদক হইতে BD ও DF অংশ ছেদন করিয়াছে ; আরও মনে কর যে, AC = CE.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BD = DF.

অঙ্কন। B ও D বিন্দু দিয়া AE এর সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে BG ও DH সরলরেখা টান, BG ও DH যেন CD ও EFকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। এখন, BG ও DH সমান্তরাল ; কারণ, ইহাদের প্রত্যেকেই AEএর সমান্তরাল, এবং BF ইহাদের ভেদক ;

∴ ∠GBD = অনুরূপ ∠HDF (উপ ১০)

আবার, যেহেতু CD ও EF সমান্তরাল এবং BF ইহাদের ভেদক,

∴ ∠BDG = অনুরূপ ∠DFH (উপ ১০)

এখন, যেহেতু AG ও CH দুটি সামান্তরিক,

∴ BG = AC, DH = CE.

কিন্তু দেওয়া আছে যে, AC = CE

অতএব, BG = DH.

এখন, BDG ও DFH ত্রিভুজের মধ্যে

যেহেতু $\begin{cases} \angle GBD = \angle HDF \\ \angle BDG = \angle DFH \\ \text{এবং BG বাহু} = \text{অনুরূপ DH বাহু} \end{cases}$

∴ BDG ও DFH ত্রিভুজ দুটি সর্বসম, (উপ. ১৫)

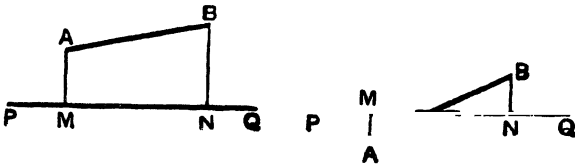
∴ BD = DF.

মন্তব্য। এইরূপে তিনের অধিক সমান্তরাল সরলরেখা থাকিলেও উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যাইবে।

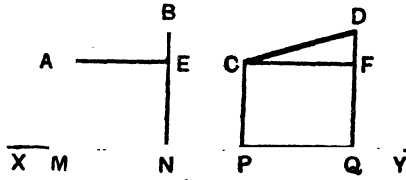
অনু ১। কোন ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা ত্রিভুজের অপর বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করে।

অনু ২। কোন ত্রিভুজের এক বাহুকে যত সমান অংশে বিভক্ত করা যায়, ছেদ-বিন্দুগুলি দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে, উহারা অন্য বাহুকে তত সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। ত্রিভুজের শীর্ষ দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টানিয়া এই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে উপরিউক্ত অনুসিদ্ধান্ত দুটি অতি সহজে প্রমাণ করা যাইতে পারে। কিন্তু শিক্ষার্থিগণ ২৫শ উপপাদ্যের সাহায্য ব্যতীতও এই অনুসিদ্ধান্ত দুটি প্রমাণ করিবে। প্রথম অনুসিদ্ধান্তের প্রমাণের জন্য ১০৩ পৃষ্ঠায় উদাহরণ ২ দেখ।

অভিক্ষেপ। মনে কর, AB একটি সীমাবিশিষ্ট সরলরেখা; উহার দুই প্রান্তবিন্দু A ও B হইতে অপর যে কোন একটি সরলরেখা PQ এর উপর AM ও BN লম্ব। এই লম্ব দুটি যেন PQ হইতে MN অংশ ছেদন করিল।

তাহা হইলে, MNকে PQএর উপর ABএর **লম্ব-অভিক্ষেপ** (Orthogonal Projection) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য। সাধারণত **অভিক্ষেপ** (Projection) বলিলে লম্ব-অভিক্ষেপই বুঝাইয়া থাকে।

অনু.৩। একই সরলরেখার উপর পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল সরলরেখার অভিক্ষেপগুলিও পরস্পর সমান।

মনে কর, AB ও CD দুটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল সরলরেখা ; এবং XY সরলরেখাব উপর MN ও PQ যথাক্রমে AB ও CDএর অভিক্ষেপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, MN = PQ.

অঙ্কন। XYএর সমান্তরাল করিয়া AE ও CF সরলরেখা টান, ইহারা যেন BN ও DQকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। দেওয়া আছে যে, AB ও CD সমান্তরাল ;

আবার, AE এবং CF ও সমান্তরাল, কারণ ইহাদের প্রত্যেকেই XYএর সমান্তরাল।

$\therefore \angle BAE = \angle DCF$ (উপ ১১, অনু)

এখন ABE, CDF ত্রিভুজের মধ্যে,

$\because$ { $\angle BAE = \angle DCF$
$\angle AEB = \angle CFD$, সমকোণ বলিয়া
এবং $AB = CD$.

অতএব, ABE, CDF ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ;

$\therefore AE = CF$.

কিন্তু $AE = MN$; কারণ, AN একটি সামান্তরিক

এবং $CF = PQ$; কারণ, CQ একটি সামান্তরিক,

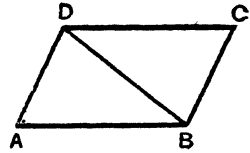
$\therefore MN = PQ$.

সামান্তরিক ও সমান্তরাল রেখা বিষয়ে বিবিধ সমাধান

১। কোন চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল হইলে, উহার অপর বাহু দুটিও পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হইবে।

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের AB ও DC বাহু দুটি পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD ও BC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

BD সংযুক্ত কর।
এখন ABD, BDC ত্রিভুজের মধ্যে,
যেহেতু, AB = CD, BD সাধারণ
এবং ∠ABD = একান্তর ∠CDB ;
অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

∴ AD = BC, ∠ADB = ∠CBD এবং ইহারা একান্তর কোণ।

∴ AD ও BC সমান্তরাল।

২। ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা অন্য বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D দিয়া BC এর সমান্তরাল DE সরলরেখা ACকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AE = CE

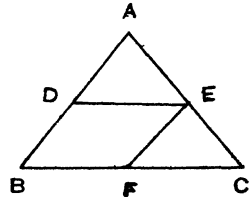
প্রমাণ। ABএর সমান্তরাল EF টান, ইহা যেন BCকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন ADE, EFC ত্রিভুজের মধ্যে

∠DAE = ∠FEC ; কারণ, AB ও EF সমান্তরাল ;

∠ADE = একান্তর ∠DEF = ∠EFC ; কারণ, DE ও BC সমান্তরাল ;

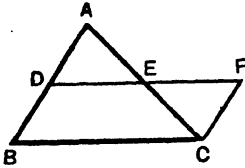
এবং AD = BD = EF ; কারণ, DF একটি সামান্তরিক ;

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। ∴ AE = CE.

৩। একটি ত্রিভুজের যে কোনও দুই বাহুর মধ্যবিন্দুসংযোজক সরলরেখা উহার তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং অর্ধেক।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) DE, BC এর সমান্তরাল, (২) $DE = \frac{1}{2}BC$.

DEকে F পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন DE = EF হয়

CF সংযুক্ত কর।

এখন AED, CEF ত্রিভুজের মধ্যে,

যেহেতু, AE = CE, DE = EF

এবং $\angle AED = \angle CEF$

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

∴ AD = CF, এবং $\angle DAE = \angle ECF$; কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ।

∴ CF, AD এর (অতএব BDএর) সমান্তরাল, এবং CF = BD ;

অতএব, DF ও BC সমান্তরাল } (উদা ১)

এবং BC = DF = ২DE ∴ $DE = \frac{1}{2}BC$ }

অনুশীলনী ১১

১। সামান্তরিকের কোনও কর্ণ যে দুটি বিপরীত কোণকে সংযুক্ত করে তাহাদিগকে দ্বিখণ্ডিত করিলে, সামান্তরিকটি রম্বস অথবা বর্গক্ষেত্র হইবে।

২। সামান্তরিকের বিপরীত কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক দুটি সমান্তরাল অথবা একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

৩। সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুগুলি অসমান হইলে, উহার কোণ-সমূহের দ্বিখণ্ডকগুলি একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করিবে।

৪। সামান্তরিকের কোনও দুই বিপরীত শীর্ষসংযোজক কর্ণের উপর অপর দুই শীর্ষ হইতে পাতিত লম্ব দুটি পরস্পর সমান।

৫। রম্বসের কর্ণ দুটি অসমান হইবে এবং বিপরীতক্রমে, কোন সমবাহু চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় অসমান হইলে তাহা রম্বস হইবে।

৬। একটি রম্বস উহার প্রত্যেক কর্ণের সহিত প্রতিসম হইবে।

৭। যদি একটি সামান্তরিক উহার কোন কর্ণের সহিত প্রতিসম হয়, তবে সামান্তরিকটি রম্বস অথবা বর্গক্ষেত্র হইবে।

৮। একটি আয়তক্ষেত্র উহার কোন দুই বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখার সহিত প্রতিসম হইবে।

একটি আয়তক্ষেত্রের কয়টি প্রতিসাম্য অক্ষ হইতে পারে ?

৯। ABCD, ABEF দুটি সামান্তরিক একই ভূমি AB এর উপর অবস্থিত। CE ও DF সংযুক্ত করিলে, প্রমাণ কর যে, CDFE একটি সামান্তরিক।

১০। একটি ত্রিভুজ, উহার বাহুগুলির মধ্যবিন্দু দিয়া বিপরীত বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহার চারিগুণ।

১১। ABCD একটি সামান্তরিক, ইহার AC কর্ণ A কোণকে দ্বিখণ্ডিত করিলে, প্রমাণ কর যে,

(১) C কোণকে AC দ্বিখণ্ডিত করে,

(২) B ও D কোণকে কর্ণ BD দ্বিখণ্ডিত করে,

(৩) সামান্তরিকটি একটি রম্বস।

১২। ABCD সামান্তরিকের AB, BC, CD ও DA বাহুর মধ্যে যথাক্রমে E, F, G ও H চারিটি বিন্দু। যদি AH = CF এবং BE = DG হয়, তবে প্রমাণ কর যে, EFGH একটি সামান্তরিক।

১৩। ট্রাপিজিয়মের তির্যক্ বাহু দুটি সমান হইলে, প্রমাণ কর যে, উহার (১) বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক,

(২) প্রত্যেক সমান্তরাল বাহু সংলগ্ন কোণ দুটি সমান,

(৩) কর্ণদ্বয় সমান।

১৪। কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে উহার বিপরীত বাহু দুটি পর্যন্ত যে কোন সরলরেখা টানা যায়, তাহা প্রত্যেক কর্ণ দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে এবং তাহা সামান্তরিককে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

১৫। ABCD একটি সামান্তরিকের ভিতরে O কোন এক বিন্দু।

CAPB, OBQC, OCRD, ODSA সামান্তরিকগুলি অঙ্কিত করিলে, প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক এবং ইহার ক্ষেত্রফল ABCD এর ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

১৬। ট্রাপিজিয়মের কোন কর্ণের মধ্যবিন্দু দিয়া সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল করিয়া সরল রেখা টানিলে, ঐ রেখা উহার অপর কর্ণ ও তির্যক্ বাহু দুটির প্রত্যেককে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

১৭। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলে উৎপন্ন চারিটি ত্রিভুজ পরস্পর সর্বসম হইবে।

১৮। কোনও চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুর মধ্যবিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলে উৎপন্ন চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হইবে।

১৯। চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা দুটি পরস্পরকে দ্বিখণ্ডিত করে।

২০। ট্রাপিজিয়মের তির্যক্ বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুসংযোজক সরলরেখা উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং উহাদের সমষ্টির অর্ধেক হইবে।

২১। ত্রিভুজের কোন বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল করিয়া অপর বাহু পর্যন্ত সরল রেখা টানিলে, ঐ রেখা ভূমির অর্ধেক হইবে।

২২। কোনও সরলরেখার উপর সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলির অভিক্ষেপ পরস্পর সমান হইবে।

২৩। কোনও সরলরেখার উপর কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার লম্ব-অভিক্ষেপ নির্দিষ্ট সরলরেখা অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না।

২৪। কোন এক সরলরেখার উপর সমান সমান সরলরেখার অভিক্ষেপগুলি সমান হইলে উহারা পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

২৫। কোন এক সরলরেখার উপর যে সকল সমান্তরাল সরল-রেখার অভিক্ষেপগুলি সমান তাহারা পরস্পর সমান।

২৬। E এবং F যথাক্রমে ABCD একটি সামান্তরিকের AD ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে;

(১) ABFE, CDEF এবং EBFD ক্ষেত্রগুলি পরস্পর সমান সামান্তরিক;

(২) BE ও FD, AC কর্ণকে ত্রিখণ্ডিত করে।

তৃতীয় অধ্যায়

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা

তোমরা দেখিয়াছ, যে প্রতিজ্ঞায় জ্যামিতিক কোন অঙ্কন সম্পন্ন করিতে হয় তাহাকে **সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা** (Problem) বলে। জ্যামিতিক অঙ্কন কার্যের জন্য নিম্নলিখিত বিষয়গুলি স্বীকার করিয়া লইতে হয়। এইজন্য ইহাদিগকে **স্বীকার্য** (Postulates) বলে ; যথা—

১। এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে অপর এক নির্দিষ্ট বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা টানা যাইতে পারে।

২। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা উভয় পার্শ্বে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করা যাইতে পারে।

৩। যে কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন পরিমাণ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

উল্লিখিত প্রথম ও দ্বিতীয় স্বীকারোক্তিতে একখানা স্কেল শূন্য মাপনীর ব্যবহার এবং তৃতীয় স্বীকারোক্তিতে একখানা কম্পাসের ব্যবহার প্রার্থনা করা হইয়াছে। এইজন্য জ্যামিতিক কোন অঙ্কন কেবল মাত্র মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যেই সম্পন্ন করিতে হয়। যে অঙ্কনে এই দুটি যন্ত্র ব্যতীত অন্য কোনও যন্ত্র ব্যবহৃত হয় তাহা জ্যামিতিক অঙ্কন বলিয়া গণ্য হয় না। কেবলমাত্র মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে জ্যামিতিক অঙ্কন কিরূপে সম্পন্ন করিতে হয় এই অধ্যায়ে তোমাদিগকে তাহাই দেখান হইবে।

মন্তব্য। তোমরা দেখিয়াছ যে, জ্যামিতির সংজ্ঞানুযায়ী রেখা বা বৃত্তের অস্তিত্ব পৃথিবীতে নাই, এবং কোনও যন্ত্র দ্বারা ঐ অঙ্কন সম্পন্ন করা সম্ভবপর নহে। যদি কোন যন্ত্র দ্বারা ঐ অঙ্কন সম্পন্ন করা যাইত, তবে স্বীকার করিয়া লইতে হয় এরূপ বলার কোনই আবশ্যক হইত না। অতএব মাপনী ও কম্পাসের ব্যবহার ব্যতীত ঐ স্বীকারোক্তিতে ইহাও প্রার্থনা করা হইতেছে যে, ঐ যন্ত্র দুটির সাহায্যে যে অঙ্কন সম্পন্ন করা হইবে তাহা জ্যামিতিক অঙ্কন বলিয়া গণ্য করিতে হইবে।

সম্পাদ্য ১

একটি নির্দিষ্ট কোণকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

মনে কর, AOB একটি নির্দিষ্ট কোণ, ইহাকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। Oকে কেন্দ্র করিয়া যে কোনও ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, ইহা যেন OA এবং OBকে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল।

C ও Dকে কেন্দ্র করিয়া CDএর অর্ধেক অপেক্ষা বেশি যে কোনও একই ব্যাসার্ধ লইয়া দুটি বৃত্তচাপ আঁক, উহারা যেন পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করিল। OE সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, AOB কোণকে OE দ্বিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ। EC ও ED সংযুক্ত কর।

এখন OCE, ODE ত্রিভুজের মধ্যে

∵ { OC = OD, একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া,
CE = DE সমান সমান " " "
এবং OE সাধারণ। }

অতএব OCE, ODE ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। (উপ ১৮)

$\therefore \angle COE = \angle DOE$

অর্থাৎ $\angle$AOBকে OE দ্বিখণ্ডিত করিল।

দ্রষ্টব্য ১। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার নির্বচনের ন্যায় প্রত্যেক সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞার নির্বচনও দুই অংশে বিভক্ত করা যায়। যথা, (১) **উপাত্ত** (data), (২) **করণীয়** (quaesita)। যাহা দেওয়া আছে

তাহাকে উপাত্ত এবং যাহা করিতে হইবে তাহাকে করণীয় বলে। যথা, উপরিউক্ত প্রতিজ্ঞায় নির্বচনের প্রথম বা উপাত্ত অংশে—'একটি কোণ দেওয়া আছে' এবং দ্বিতীয় বা করণীয় অংশে 'উহাকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে' ইহা বুঝা যাইতেছে।

দ্রষ্টব্য ২। C ও Dকে কেন্দ্র করিয়া যে ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্তচাপ অঙ্কিত করিলে তাহা CDএর অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইতেই হইবে, কারণ তাহা না হইলে বৃত্তচাপ দুটি পরস্পর ছেদ করিবে না।

সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার প্রমাণ প্রণালীতে দেখিয়াছ যে, আমরা কোন নির্দিষ্ট কল্পনা হইতে পূর্ব প্রমাণিত জ্যামিতিক সত্যের সাহায্যে ক্রমে ক্রমে সিদ্ধান্তে উপনীত হইয়াছি।

কোন নির্দিষ্ট কল্পনা হইতে পূর্ব প্রমাণিত জ্যামিতিক সত্যের সাহায্যে ক্রমে ক্রমে সিদ্ধান্তে উপনীত হইবার এই প্রণালীকে **সংশ্লেষণ** (Synthesis) প্রণালী বলে।

কিন্তু সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞাতে তোমরা দেখিতেছ যে, উহার নির্বচনের উপাত্ত অংশ হইতে সাধারণত এমন কিছু পাওয়া যায় না যে, তাহা হইতে পূর্ব জ্যামিতিক সত্যের সাহায্যে প্রতিজ্ঞার উদ্দেশ্য সাধন করা যায়। ঐ ক্ষেত্রে যে প্রণালী অনুসরণ করিতে হয় তাহাকে **বিশ্লেষণ** (Analysis) প্রণালী বলে। ইহাতে (১) প্রথমে প্রতিজ্ঞার উদ্দেশ্য সিদ্ধ হইল বলিয়া ধরিয়া লইতে হয় অর্থাৎ যে যে অঙ্কন সম্পন্ন করিতে হইবে, মনে কর যেন একটি চিত্রে সে সকল অঙ্কন সম্পন্ন হইল এবং ইহাতে প্রতিজ্ঞার উদ্দেশ্য সিদ্ধ হইল। এবং (২) পরে ঐ চিত্রের সমস্ত অংশ পর্যবেক্ষণ করিয়া উহা হইতে কি জ্যামিতিক সত্যে উপনীত হওয়া যায় তাহা দেখিতে হয় এবং ঐ সত্য হইতে প্রতিজ্ঞার উদ্দেশ্য সাধনের প্রকৃষ্ট পন্থা নির্ধারণ করিতে হয়। এবং (৩) তার পর ঐ নির্ধারিত পন্থা অনুসরণ করিয়া অঙ্কন ও প্রমাণ কার্য সম্পন্ন করিতে হয়।

যথা, উপরিউক্ত প্রতিজ্ঞার অঙ্কনপ্রণালী নিম্নলিখিত বিশ্লেষণ হইতে পাওয়া যায়।

মনে কর, AOB কোণের উদ্দিষ্ট দ্বিখণ্ডক OE। এখন OA ও OB হইতে OC ও OD পরস্পর সমান অংশ লও এবং CE ও DE সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে OCE ও ODE দুটি ত্রিভুজ হইল ; ইহাদের মধ্যে,

যেহেতু { OC = OD, OE সাধারণ
এবং $\angle COE = \angle DOE$

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ; $\therefore$ CE = DE.

অতএব ইহা হইতে এই পন্থা নির্ধারিত হয় যে, প্রথমে O হইতে সমদূরে C ও D দুটি বিন্দু যথাক্রমে OA এবং OBএর উপর লইতে হইবে। সুতরাং Oকে কেন্দ্র করিয়া একটি বৃত্ত আঁকিতে হইবে। পরে C ও D হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু E নির্ণয় করিতে হইবে। অতএব C ও Dকে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইযা দুটি বৃত্ত আঁকিতে হইবে। পরে OE সংযুক্ত করিলে উদ্দিষ্ট দ্বিখণ্ডক পাওয়া যাইবে।

অঙ্কন সম্বন্ধে কতিপয় জ্ঞাতব্য বিষয়

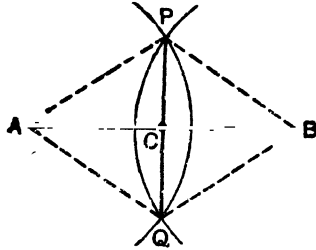
১। তোমরা দেখিয়াছ যে, কোনও সরলরেখার যে কোনও দুটি বিন্দু জানিতে পারিলেই ঐ সরলরেখাটি সম্পূর্ণরূপে জানা যায়। অতএব কোন প্রতিজ্ঞায় উদ্দিষ্ট সরলরেখা জানিতে হইলে দেখিবে যে, ঐ সরলরেখার উপর অবস্থিত হয় এরূপ দুটি বিন্দু কিংবা একটি জানা থাকিলে অন্য আর একটি বিন্দু নির্ণয় করা যায় কি না। যদি ঐরূপ বিন্দু নির্ণয় করিতে কৃতকার্য হও, তাহা হইলে বিন্দু দুটি সংযুক্ত করিলেই উদ্দিষ্ট রেখা পাইবে।

২। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে নিদিষ্ট পরিমাণ দূরে অবস্থিত কোন বিন্দু নির্ণয় করিতে হইলে, ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া নির্দিষ্ট পরিমাণ দূরত্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

ইহাতে বিন্দুটি ঠিক নির্ণয় করিতে পারিবে না। কারণ, স্পষ্টই ঐ নিয়মাধীন (অর্থাৎ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট পরিমাণ দূরে) অসংখ্য বিন্দু আছে। কিন্তু নির্ণেয় বিন্দুটি ঐ বৃত্তের পরিধিতে আছে জানিতে পারিলে এখন ঐ বিন্দুটি অপর কোন্ নিয়মাধীন তাহা দেখিয়া উহার স্থান নির্ণয় করিতে হইবে।

৩। দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী কোনও বিন্দু নির্ণয় করিতে হইলে, ঐ বিন্দু দুটিকে কেন্দ্র করিয়া এমন একই ব্যাসার্ধ লইয়া দুটি বৃত্ত আঁকিতে হইবে যেন বৃত্ত দুটি পরস্পর ছেদ করে। তাহা হইলে, ছেদ বিন্দুই নির্ণেয় বিন্দু হইবে।

সম্পাদ্য ২

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

মনে কর AB একটি সরলরেখা, ইহাকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A ও Bকে কেন্দ্র করিয়া ABএর অর্ধেক অপেক্ষা বেশি যে কোনও একই ব্যাসার্ধ লইয়া দুটি বৃত্ত চাপ আঁক; চাপ দুটি যেন P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

PQ সংযুক্ত কর, PQ যেন ABকে C বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, C বিন্দুতে AB দ্বিখণ্ডিত হইল।

প্রমাণ। AP, AQ, BP, BQ সংযুক্ত কর।

এখন APQ, BPQ ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

যেহেতু $AP = BP$, $AQ = BQ$ এবং PQ সাধারণ।

অতএব, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। $\therefore$ $\angle APQ = \angle BPQ$

আবার, APC, BPC ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

$\because$ { $AP = BP$, PC সাধারণ
এবং অন্তর্ভূত $\angle APC =$ অন্তর্ভূত $\angle BPC$ (প্রমাণিত)

অতএব, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম; $\therefore$ $AC = BC$

অর্থাৎ C বিন্দুতে AB দ্বিখণ্ডিত হইল।

অনুসিদ্ধান্ত। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার লম্ব দ্বিখণ্ডক আঁকিতে হইলে উল্লিখিত সম্পাদ্যের অঙ্কনপ্রণালী অনুযায়ী কার্য করিবে।

কারণ, প্রমাণ করা হইয়াছে যে, APC, BPC ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

∴ AC = BC এবং ACP কোণ = BCP কোণ

∴ PC ABকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করে।

দ্রষ্টব্য ১। A ও B কে কেন্দ্র করিয়া যে বৃত্ত দুটি অঙ্কিত হইল তাহাদের ব্যাসার্ধ AB এর অর্ধেক অপেক্ষা বড় না হইলে বৃত্ত দুটি পরস্পর ছেদ করিবে না।

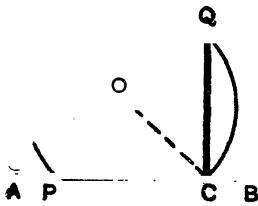
দ্রষ্টব্য ২। **কাগজ ভাঁজ করিয়া সরলরেখা দ্বিখণ্ডন**। কাগজখানি এরূপভাবে ভাঁজ কর যেন রেখাটির এক প্রান্তবিন্দু অপর প্রান্তবিন্দুর উপর পড়ে। ভাঁজের চিহ্ন সরলরেখাটিকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

সম্পাদ্য ৩

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার অন্তর্গত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর লম্ব টানিতে হইবে।

মনে কর AB একটি সরলরেখা, C ইহার অন্তঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু; C হইতে AB রেখার লম্ব টানিতে হইবে।

প্রথম প্রকার

AB রেখার বহিঃস্থ যে কোনও একটি O বিন্দু লও। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OC এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। বৃত্তটি যেন AB রেখাকে অপর একটি P বিন্দুতে ছেদ করিল।

OP সংযুক্ত কর। PO বর্ধিত করিলে উহা যেন বৃত্তের পরিধিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। CQ সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, CQ সরলরেখাই C বিন্দু হইতে AB রেখার উপর লম্ব

প্রমাণ। OC সংযুক্ত কর।

এখন, $\angle OCQ = \angle OQC$; কারণ, $OQ = OC$

এবং $\angle OCP = \angle OPC$; কারণ, $OP = OC$

$\therefore$ সমস্ত $\angle PCQ = \angle CQP + \angle CPQ$

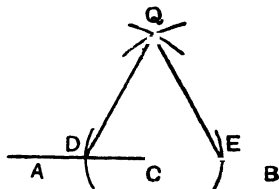
কিন্তু ঐ তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ;

$\therefore$ $\angle PCQ$ = এক সম $\angle$

$\therefore$ CQ, C বিন্দুতে AB এর লম্ব।

দ্বিতীয় প্রকার

C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোনও ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। এই বৃত্তটি যেন AB রেখাকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল।

D ও Eকে কেন্দ্র করিয়া CD অপেক্ষা বৃহত্তর একই ব্যাসার্ধ লইয়া দুটি বৃত্তচাপ আঁক। এই চাপ দুটি যেন পরস্পর Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

CQ সংযুক্ত কর।

CQ সরলরেখাই C বিন্দু হইতে AB রেখার লম্ব।

প্রমাণ। DQ, EQ সংযুক্ত কর।

এখন, DCQ, ECQ ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

যেহেতু, $CD = CE$, $DQ = EQ$, এবং CQ সাধারণ।

অতএব, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। $\therefore$ $\angle DCQ = \angle ECQ$

$\therefore$ CQ C বিন্দুতে AB এর লম্ব।

মন্তব্য। C বিন্দু AB রেখার এক প্রান্তে অবস্থিত না হইলে এই প্রণালী অবলম্বন করা যাইতে পারে।

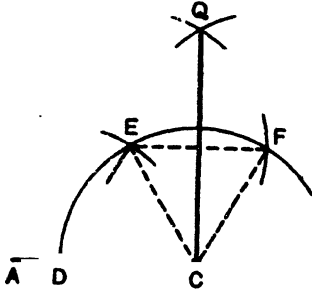
তৃতীয় প্রকার

C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ইচ্ছামত ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক।

এই চাপটি যেন AB রেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ঐ একই ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ আঁক।

এই চাপ দুটি যেন E বিন্দুতে ছেদ করিল।

আবার E কে কেন্দ্র করিয়া ঐ একই ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ আঁক।

এই চাপটি যেন প্রথম চাপকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

পরে E ও F বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করিয়া ঐ একই ব্যাসার্ধ লইয়া দুটি বৃত্তচাপ আঁক ; এই শেষোক্ত চাপ দুটি যেন Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

CQ সংযুক্ত কর।

CQ সরলরেখাই C বিন্দু হইতে AB রেখার লম্ব।

প্রমাণ। CE, CF সংযুক্ত কর।

এখন স্পষ্টই DCE, ECF কোণের প্রত্যেকেই সমবাহু ত্রিভুজের কোণ।

∴ $\angle DCE = \angle ECF =$ ৬০°

এবং যেহেতু CQ, ECF কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে,

∴ $\angle ECQ =$ ৩০° ∴ $\angle DCQ =$ ৯০°।

দ্রষ্টব্য। সম্পাদ্য ২এর অনুসিদ্ধান্ত হইতে কোন সীমাবিশিষ্ট সরলরেখার মধ্যবিন্দু হইতে উহার উপর লম্ব টানিবার প্রণালী পাওয়া যায়।

সম্পাদ্য ৪

কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর লম্ব টানিতে হইবে।

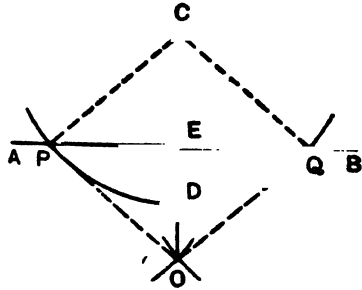
মনে কর AB একটি সরলরেখা এবং C ইহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু; C বিন্দু হইতে AB রেখার অপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।

প্রথম প্রকার

AB সরলরেখার যে পার্শ্বে C বিন্দু অবস্থিত, তাহার বিপরীত পার্শ্বে যে কোন একটি বিন্দু D লও।

C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া CD দূরত্ব ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক।

এই বৃত্তচাপটি যেন AB রেখাকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

P ও Qকে কেন্দ্র করিয়া ঐ একই ব্যাসার্ধ লইয়া দুটি বৃত্তচাপ আঁক।

এই চাপ দুটি যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। OC সংযুক্ত কর।

OC সরলরেখা যেন AB রেখাকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, C বিন্দু হইতে AB রেখার উপর CE লম্ব হইল।

প্রমাণ। CP, CQ, OP, OQ সংযুক্ত কর।

এখন PCO, QCO ত্রিভুজ দুটির মধ্যে,

যেহেতু PC = QC, OP = OQ, এবং OC সাধারণ।

অতএব, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। ∴ ∠PCO = ∠QCO

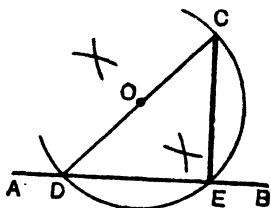
আবার, PCE, QCE ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

∵ { PC = QC, CE সাধারণ
এবং অন্তর্ভূত ∠PCE = অন্তর্ভূত ∠QCE (প্রমাণিত) }

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। ∴ ∠PEC = ∠QEC

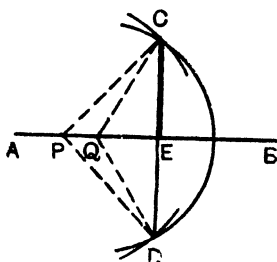
∴ PQ এর উপর CE লম্ব, অর্থাৎ AB এর উপর CE লম্ব।

দ্বিতীয় প্রকার

AB রেখার মধ্যে যে কোন একটি বিন্দু D লও। DC সংযুক্ত কর, এবং DC কে O বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OD ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক, বৃত্তটি যেন AB রেখাকে অপর একটি E বিন্দুতে ছেদ করিল। CE সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, AB এর উপর CE লম্ব হইল।

প্রমাণ। ∠CED = এক সমকোণ, ∴ AB এর উপর CE লম্ব।
(তৃতীয় সম্পাদ্য, প্রথম প্রকারের প্রমাণ দেখ।)

তৃতীয় প্রকার

AB সরলরেখার মধ্যে সুবিধাজনক যে কোনও দুটি বিন্দু লও ; P ও Q যেন এই দুটি বিন্দু।

P বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া PC দূরত্ব ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর।

আবার Q বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া QC দূরত্ব ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর।

AB রেখার যে পার্শ্বে C বিন্দু অবস্থিত, তাহার অপর পার্শ্বে অঙ্কিত চাপ দুটি যেন D বিন্দুতে ছেদ করিল। CD সংযুক্ত কর।

CD সরলরেখা যেন AB রেখাকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, CE রেখা C বিন্দু হইতে AB রেখার উপর লম্ব হইল।

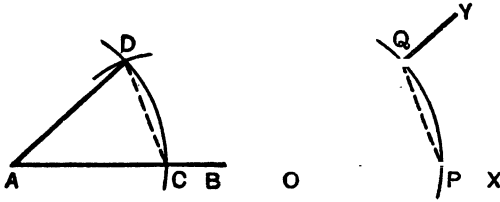
প্রমাণ। PCQ ও PDQ ত্রিভুজ দুটি সর্বসম দেখান যাইতে পারে।

∴ ∠CPQ = ∠DPQ. [(উপ ১৮)

আবার PEC, PED ত্রিভুজ দুটি সর্বসম দেখান যাইতে পারে (উপ ৪)

∴ ∠CEP = ∠DEP. ∴ CE AB এর উপর লম্ব।

সম্পাদ্য ৫

কোন সরলরেখার অন্তর্গত কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর AB সরলরেখার A বিন্দুতে XOY কোণের সমান একটি কোণ আঁকিতে হইবে।

O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ইচ্ছামত ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। মনে কর এই বৃত্ত OX রেখাকে P বিন্দুতে এবং OY রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

আবার A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OP রেখার সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। মনে কর এই বৃত্ত AB রেখাকে C বিন্দুতে ছেদ করিল।

আবার C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া PQ রেখার সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। মনে কর শেষোক্ত বৃত্ত দুটি যেন D বিন্দুতে ছেদ করিল।

AD সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, AB রেখার A বিন্দুতে XOY কোণের সমান CAD কোণ অঙ্কিত হইল।

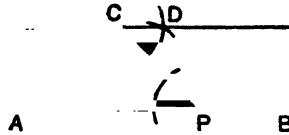
প্রমাণ। CD, PQ সংযুক্ত কর।

এখন, CAD, POQ ত্রিভুজের মধ্যে

$$\text{যেহেতু,} \begin{cases} AC = OP, \\ AD = OQ, \\ CD = PQ \end{cases}$$

অতএব, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ; $\therefore \quad \angle CAD = \angle POQ.$

সম্পাদ্য ৬

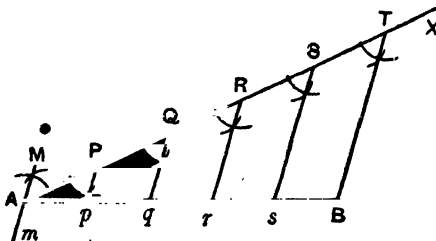
কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। C বিন্দু দিয়া AB এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা আঁকিতে হইবে।

AB রেখার মধ্যে যে কোন P বিন্দু লও। PC সংযুক্ত কর।

CP রেখার C বিন্দুতে CPA একান্তর কোণের সমান PCD কোণ আঁক।

তাহা হইলে, C বিন্দু দিয়া CD AB এর সমান্তরাল হইল।

সম্পাদ্য ৭

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কতকগুলি সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

মনে কর যেন AB সরলরেখাকে পাঁচ সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB রেখার সহিত একটি সূক্ষ্মকোণ করিয়া A বিন্দু হইতে AX একটি সরলরেখা টান। AX হইতে AP, PQ, QR, RS, ST এই পাঁচটি সমান অংশ কাটিয়া লও।

TB সংযুক্ত কর এবং P, Q, R ও S হইতে TB এর সমান্তরাল সরল রেখা টান, উহারা যেন AB কে যথাক্রমে p, q, r ও s বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, AB ঐ সকল বিন্দুতে পাঁচ সমান অংশে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ। A বিন্দু দিয়া TB এর সরান্তরাল MAm টান।

এখন, MA, Pp, Qq, Rr, Ss ও TB পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা এবং AP, PQ, QR, RS ও ST ইহারা পরস্পর সমান;

∴ Ap, pq, qr, rs ও sB পরস্পর সমান। (উপ ২৫)

অনুশীলনী ১২

১। মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে ৬০° একটি কোণ আঁকিয়া উহাকে (১) চারি (২) আট সমান অংশে বিভক্ত কর।

(নিম্নলিখিত অঙ্কন কার্য সম্পন্ন কর এবং যুক্তি দ্বারা সপ্রমাণ কর)

২। ৪·২" একটি সরলরেখা টানিয়া উহাকে ত্রিখণ্ডিত কর। ডিভাইডারের সাহায্যে ফল পরীক্ষা কর।

৩। ১০·৯ সেণ্টিমিটর একটি সরলরেখা টানিয়া উহাকে ৭ সমান অংশে বিভক্ত কর এবং মাপিয়া যে কোন এক অংশের পরিমাণ (১) সেণ্টিমিটর ও আসন্ন মিলিমিটরে, (২) ইঞ্চিতে (আসন্ন শতাংশ পর্যন্ত) নির্ণয় কর।

এখন ১ সেঃ মিঃ = ০·৩৯৩৭ ইঞ্চি হয় কি না পীরক্ষা করিয়া দেখ।

৪। মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে ৪৫° একটি কোণ আঁকিয়া উহাকে দ্বিখণ্ডিত কর। কোণমান যন্ত্রদ্বারা মাপিয়া ফল পরীক্ষা কর।

৫। ACB একটি ৯০° কোণ আঁকিয়া উহাকে ত্রিখণ্ডিত কর।

[C কে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক; ইহা যেন AC ও CB কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। D ও E কে

কেন্দ্র করিয়া ঐ একই ব্যাসার্ধ লইয়া দুটি চাপ আঁক; ইহারা যেন বৃত্তটিকে F ও G বিন্দুতে ছেদ করিল; CF, CG সংযুক্ত কর।]

৬। ৩" লম্বা AB সরলরেখা টানিয়া A ও B হইতে ২.৫" দূরবর্তী P বিন্দু নির্ণয় কর। P হইতে AB এর উপর PQ লম্ব টান। PQ এর দৈর্ঘ্য মাপনীর দ্বারা নির্ণয় কর।

৭। একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের তিন কোণের দ্বিখণ্ডকগুলির সম্পাত-বিন্দু স্থির কর।

৮। যে কোন একটি ত্রিভুজ আঁকিয়া উহার ভরকেন্দ্র (বা মধ্যমাত্রয়ের সম্পাতবিন্দু) স্থির কর।

৯। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন একটি সরলরেখা টান, যেন উহা অপর দুটি পরস্পর ছেদিত সরলরেখার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

১০। ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সর্বসম হয় এরূপ একটি ত্রিভুজ আঁক।

১১। ABCD একটি নির্দ্দিষ্ট চতুর্ভুজের সহিত সর্বসম হয় এরূপ একটি চতুর্ভুজ আঁক।

১২। একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে একটি সরলরেখা টানিয়া উহাকে দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত কর।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি বিশ্লেষণ করিয়া সমাধান কর।

১৩। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্যে এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যেন উহা অন্য দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী হয়। কখন ইহা সম্ভব হইবে?

১৪। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন একটি সরলরেখা টান যেন অন্য দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর পাতিত লম্বদ্বয় সমান হয়। কখন ইহা সম্ভব হইবে না?

১৫। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্যে এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহা দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হইবে। কখন ইহা সম্ভব নহে?

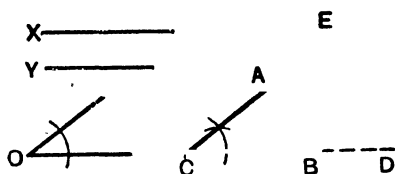
১৬। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এমন একটি সরলরেখা টানিতে হইবে যাহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ উৎপন্ন করিবে।

ত্রিভুজ অঙ্কন

উপপাদ্য ৪, ১৫, ১৮ এবং ১৯ হইতে তোমরা দেখিয়াছ যে, যদি একটি ত্রিভুজের তিন অঙ্গ (ইহার মধ্যে অন্ততঃ একটি অঙ্গ একটি বাহু হইবে) যথাক্রমে অন্য একটি ত্রিভুজের অনুরূপ তিন অঙ্গের সমান হয় তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হইয়া থাকে। অর্থাৎ এক ত্রিভুজকে অন্য ত্রিভুজের উপর উপরিপাত করিলে উহারা সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে, সুতরাং উহাদের আকৃতি ও আয়তন একইরূপ হইবে। অতএব দেখা যায় যে, একটি ত্রিভুজের আকৃতি ও আয়তন নির্দিষ্ট হইতে হইলে উহার এক বাহু এবং অন্য যে কোনও দুই অঙ্গ নির্দিষ্ট হইতে হইবে।

অতএব, কোন ত্রিভুজের একটি বাহু ও অপর যে কোন দুই অঙ্গ দেওয়া থাকিলেই ত্রিভুজটি অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

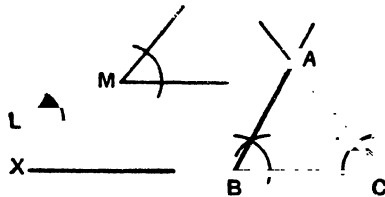
সম্পাদ্য ৮

কোন ত্রিভুজের দুই বাহু এবং তাহাদের অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, কোন ত্রিভুজের দুই বাহু X ও Y এই দুটি নির্দিষ্ট সরল-রেখার সমান এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ নির্দিষ্ট O কোণের সমান। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। যে কোন একটি সরলরেখা CD টান ; CD হইতে X এর সমান CB অংশ ছেদ কর। C বিন্দুতে O কোণের সমান BCE কোণ আঁক। CE হইতে Y এর সমান CA অংশ ছেদ কর। AB সংযুক্ত কর। তাহা হইলে, ACB উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

কারণ, অঙ্কন অনুযায়ী $CB = X$, $CA = Y$ এবং $\angle ACB = \angle O$.

সম্পাদ্য ৯

কোন ত্রিভুজের দুই কোণ এবং উহাদের সংলগ্ন বাহুর পরিমাণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, ত্রিভুজের দুই কোণ L, M দুটি নির্দিষ্ট কোণের সমান এবং উহাদের সংলগ্ন বাহু নির্দিষ্ট সরলরেখা X এর সমান।

ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। X এর সমান করিয়া BC একটি সরলরেখা টান।

BC এর B বিন্দুতে L কোণের সমান CBA কোণ আঁক।

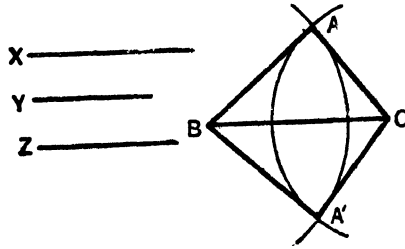
আবার C বিন্দুতে BC এর ঐ একই পার্শ্বে M কোণের সমান BCA কোণ আঁক। BA ও CA যেন A বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

দ্রষ্টব্য ১। যে দুটি কোণের পরিমাণ দেওয়া আছে তাহারা একত্র যোগে দুই সমকোণের কম হইবে নতুবা ত্রিভুজটি অঙ্কিত করা যাইবে না।

দ্রষ্টব্য ২। ত্রিভুজের দুই কোণ নির্দিষ্ট থাকিলে, উহার তৃতীয় কোণও নির্দিষ্ট হয়, কারণ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান (উপ ১৩)। সুতরাং নির্দিষ্ট বাহুটি উভয় কোণের সংলগ্ন না হইয়া, মাত্র এক কোণের সংলগ্ন দেওয়া থাকিলেও উল্লিখিত প্রণালীতে ত্রিভুজটি অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

সম্পাদ্য ১০

কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর পরিমাণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, কোন ত্রিভুজের তিন বাহু X, Y, Z এই তিনটি নির্দি সরলরেখার সমান ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। X এর সমান BC একটি সরলরেখা টান।

Cকে কেন্দ্র করিয়া Y এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক ;

Bকে কেন্দ্র করিয়া Z এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অন্য একটি বৃত্ত আঁক ; বৃত্ত দুটি যেন A বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB, AC সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

কারণ, অঙ্কন অনুযায়ী, BC = X, CA = Y এবং AB = Z.

দ্রষ্টব্য। এই প্রতিজ্ঞায় অঙ্কিত বৃত্ত দুটি BC এর অপর পার্শ্বে A′ বিন্দুতেও ছেদ করিবে। সুতরাং ABC বা A′BC উহাদের প্রত্যেকেই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

সম্পাদ্য ১১

কোন ত্রিভুজের দুই বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণের পরিমাণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর একটি ত্রিভুজের দুই বাহু X ও Y এই দুটি নির্দিষ্ট সরল-রেখার সমান এবং উহার X এর সমান বাহুর বিপরীত কোণ O এই নির্দিষ্ট কোণের সমান ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। একটি সরলরেখা AD টান। A বিন্দুতে O কোণের সমান করিয়া DAE কোণ আঁক।

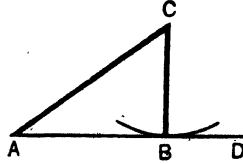
AE হইতে Y এর সমান AC অংশ ছেদ কর। Cকে কেন্দ্র করিয়া X এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, ইহা যেন ADকে B বিন্দুতে ছেদ করিল।

BC সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

দ্রষ্টব্য। এই প্রতিজ্ঞায় কতিপয় পক্ষ উপস্থিত হইতে পারে। যথা,

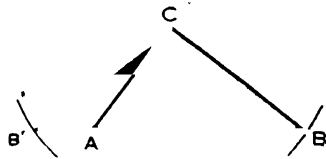
(১) X, C হইতে AD এর উপর পাতিত লম্ব অপেক্ষা ছোট হইলে বৃত্তটি AD এর সহিত মিলিত হইবে না ; সুতরাং প্রদত্ত অঙ্গ বিশিষ্ট কোন ত্রিভুজই অঙ্কিত করা যাইবে না।

(২) X, উক্ত লম্বের সমান হইলে, বৃত্তটি ADকে এক বিন্দুতে স্পর্শ করিবে ; সুতরাং এস্থলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

(৩) X, উক্ত লম্ব অপেক্ষা বড় হইলে, বৃত্তটি AD অথবা বর্ধিত DAকে B ও B′ দুটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। এবং এই ক্ষেত্রে পুনঃ তিনটি পক্ষ উপস্থিত হইবে। যথা,

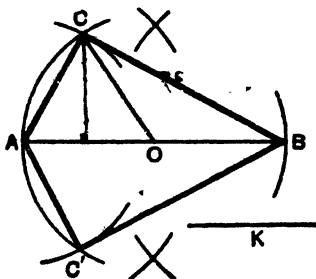
(ক) X, Y বা AC অপেক্ষা ছোট হইলে, B ও B′ A বিন্দুর একই পার্শ্বে থাকিবে (যেমন মূল প্রতিজ্ঞার চিত্রে) এবং প্রদত্ত অঙ্গ বিশিষ্ট ABC ও AB′C দুটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

ইহা **দ্ব্যর্থক সমাধান** (Ambiguous Solution) নামে অভিহিত হয়।

(খ) X, Y বা AC এর সমান হইলে, B′ A বিন্দুর সহিত মিলিত হইবে এবং ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

(গ) X, Y বা AC অপেক্ষা বড় হইলে B ও B′ A বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে থাকিবে, এবং এস্থলে ABC একটি মাত্র উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে, কারণ ACB′ ত্রিভুজের A কোণ প্রদত্ত কোণের সমান না হইয়া, উহার সম্পূরক হইবে।

মন্তব্য। উল্লিখিত প্রতিজ্ঞায় Oকে সূক্ষ্মকোণ ধরা হইয়াছে। O সমকোণ বা স্থূলকোণ হইলে যে যে পক্ষ উপস্থিত হইতে পারে তাহা শিক্ষার্থিগণ নির্ণয় করিবে।

সম্পাদ্য ১২

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অন্য এক বাহুর পরিমাণ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, AB নির্দিষ্ট অতিভুজ এবং K নির্দিষ্ট বাহু।

অঙ্কন। AB কে O বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। O কে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক।

A কে কেন্দ্র করিয়া K এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি বৃত্ত আঁক, ইহা যেন প্রথমোক্ত বৃত্তকে C বিন্দুতে ছেদ করিল।

AC ও CB সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। OC সংযুক্ত কর।

এখন, $\angle ACO = \angle CAO$; কারণ, $OA = OC$

এবং $\angle OCB = \angle OBC$; কারণ, $OB = OC$.

$\therefore$ সমস্ত $\angle ACB = \angle CAB + \angle ABC$.

কিন্তু ঐ তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান,

$\therefore$ $\angle ACB =$ এক সমকোণ।

মন্তব্য। এস্থলে বৃত্ত দুটি অপর এক C′ বিন্দুতেও ছেদ করিবে। সুতরাং AC′, C′B সংযুক্ত করিলে AC′B অন্য একটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

অনুশীলনী ১৩।

নিম্নলিখিত অঙ্গবিশিষ্ট ABC ত্রিভুজ আঁক এবং A হইতে BC এর উপর লম্ব টানিয়া উহার দৈর্ঘ্য মাপিয়া নির্ণয় কর।

১। $a=$ ১.৫″, $b=$ ২″, $c=$ ২.৫″।

২। $a=$ ৫ সেঃ মিঃ, $b=$ ৩.৮ সেঃ মিঃ, $c=$ ২.৬ সেঃ মিঃ।

৩। $a=$ ২″, $b=$ ৩″, C = ৬৫°।

৪। $a=$ ৩″, B = ৪৫°, C = ৬০°।

৫। $a=$ ৫″, $c=$ ৪.৫″, A = ৫০°।

৬। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ এবং সমান বাহু দুটির সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৭। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর পাতিত লম্বের পরিমাণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৮। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৯। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের উন্নতি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১০। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি সূক্ষ্মকোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১১। ত্রিভুজের উন্নতি ও ভূমিসংলগ্ন কোণ দুটি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১২। ত্রিভুজের দুই বাহু এবং উহাদের একটিকে দ্বিখণ্ডিত করে এইরূপ মধ্যমার পরিমাণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১৩। ত্রিভুজের ভূমি এবং অন্য দুই বাহুর সমষ্টি ও অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১৪। দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন দুটি সরলরেখা টান যেন উহারা অন্য একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

১৫। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও উহার উপর সমকোণ হইতে পাতিত লম্বের পরিমাণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

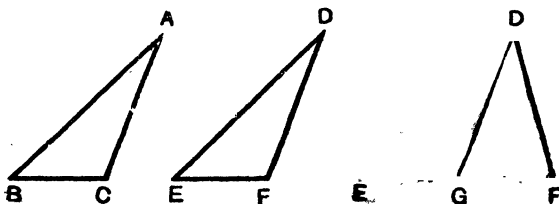
১৬। সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি এবং সমকোণ হইতে অতিভুজের

উপর পাতিত লম্বের পরিমাণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। কখন এই অঙ্কন সম্ভব হইবে না ?

১৭। নিম্নলিখিত অঙ্গবিশিষ্ট ABC ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে পার কি না চেষ্টা কর। না পারিলে, কেন অঙ্কিত করিতে পার না ? যুক্তি দেখাও।

(১) $a =$ ৫″, B = ১০৫°, C = ৯০°
(২) $a =$ ৪″, $b =$ ২·৫″, $c =$ ১″
(৩) $c =$ ৬″, $b =$ ৫″, B = ৯°
(৪) $b =$ ৩·৫″, $c =$ ৩″, C = ১২০°।

বিবিধ প্রতিজ্ঞা

১। যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয় এবং এক জোড়া সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ দুটিও সমান হয়, তবে অপর জোড়া সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ দুটি পরস্পর সমান অথবা সম্পূরক হইবে এবং প্রথম স্থলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হইবে।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র) (৩য় চিত্র)

মনে কর, ABC, DEF দুটি ত্রিভুজ, ইহাদের মধ্যে
AB = DE, AC = DF এবং ∠ABC = ∠DEF.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) ∠BCA = ∠EFD এবং ABC, DEF ত্রিভুজ দুটি সর্বসম অথবা (২) BCA, EFD কোণ দুটি পরস্পর সম্পূরক।

প্রমাণ। ABC ত্রিভুজটি DEF ত্রিভুজের উপর এরূপে স্থাপন কর যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং AB DEএর উপর পড়ে।

তাহা হইলে AB DEএর সহিত মিলিয়া যাইবে ; কারণ, AB = DE
এবং BC EFএর উপর পড়িবে ; কারণ, $\angle$ABC = $\angle$DEF

এখন, C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে অথবা EF বা বর্ধিত EF এর কোন এক বিন্দুর উপর পড়িবে।

(১) যদি C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়ে, তবে AC, DF এর সহিত মিলিয়া যাইবে এবং $\angle$BCA = $\angle$EFD ও ABC, DEF ত্রিভুজ ছুটি সর্বসম হইবে।

(২) যদি C বিন্দু F বিন্দুর উপর না পড়ে, তবে মনে কর C বিন্দু G বিন্দুর উপর পড়িল ; (৩য় চিত্র) এবং DEG, ABC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান হইল। স্থতরাং $\angle$BCA = $\angle$EGD
= FGD কোণের সম্পূরক।

কিন্তু $\angle$FGD = $\angle$GFD ; কারণ, DF = AC = DG.

∴ BCA, EFD কোণ ছুটি পরস্পর সম্পূরক।

মন্তব্য। এই প্রতিজ্ঞায় লক্ষ্য করিবে যে,

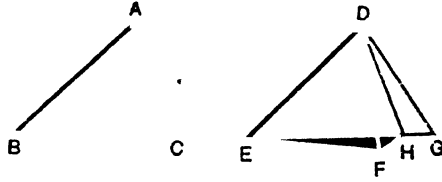
(ক) যে ছুটি কোণ সমান দেওয়া আছে তাহারা উভয়েই যদি সমকোণ অথবা স্থূলকোণ হয় তবে ত্রিভুজ ছুটি সর্বসম হইবে।

কারণ, তাহা হইলে অপর জোড়া সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ ছুটিই সূক্ষ্মকোণ হইবে। স্থতরাং তাহারা পরস্পর সম্পূরক হইতে পারে না। অতএব ত্রিভুজ ছুটি সর্বসম হইবে।

(খ) যদি অপর জোড়া সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় উভয়েই (১) সূক্ষ্মকোণ (২) স্থূলকোণ অথবা (৩) সমকোণ হয়, তবে ত্রিভুজ ছুটি সর্বসম হইবে।

কারণ, (১) ও (২) অবস্থায় কোণ ছুটি পরস্পর সম্পূরক হইতে পারে না, স্থতরাং উহারা সমান হইবে এবং (৩) অবস্থায় উহারা সমকোণ বলিয়া সমান।

(গ) যদি প্রত্যেক ত্রিভুজেই নির্দিষ্ট কোণের বিপরীত বাহু অন্য নির্দিষ্ট বাহু অপেক্ষা ছোট না হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হইবে। (কেন?)

২। যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয় কিন্তু উহাদের অন্তর্ভূত কোণ দুটি অসমান হয়, তবে যে ত্রিভুজে অন্তর্ভূত কোণটি বৃহত্তর তাহার ভূমি অন্য ত্রিভুজের ভূমি অপেক্ষা বড় হইবে।

মনে কর ABC, DEF দুটি ত্রিভুজ, ইহাদের মধ্যে

$$AB = DE, \quad AC = DF$$

কিন্তু অন্তর্ভূত $\angle BAC >$ অন্তর্ভূত $\angle EDF$

প্রমাণ করিতে বইবে যে, $BC > EF$

প্রমাণ। ABC ত্রিভুজটি DEF ত্রিভুজের উপর এরূপে রাখ যেন, A বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং AB DE এর উপর পড়ে।

তাহা হইলে, B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়িবে; কারণ, $AB = DE$ এবং AC EDF কোণের বাহিরে পড়িবে; কারণ, $\angle BAC > \angle EDF$

মনে কর, C বিন্দু G বিন্দুতে পড়িল, সুতরাং DEG, ABC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান হইল।

$$\therefore \quad DG = AC \text{ এবং } EG = BC$$

এখন E, F, G একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে, স্পষ্টই $EG > EF$

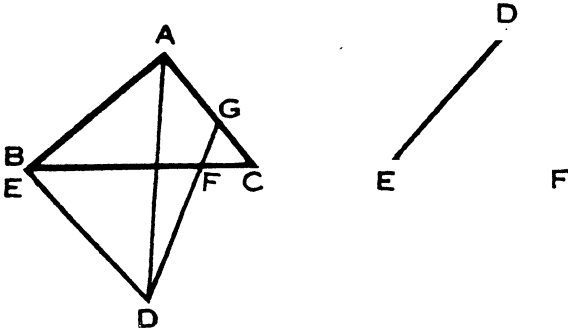
কিন্তু উহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত না হইলে, মনে কর DH FDG কোণের দ্বিখণ্ডক; DH যেন EGকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। HF সংযুক্ত কর।

এখন HF = HG ; কারণ, DFH ও DGH ত্রিভুজ দুটি সর্বসম (উপ ৪)

$\therefore$ EH + HF = EH + HG = EG

কিন্তু EH + HF > EF (উপ ২২)

$\therefore$ EG > EF ; অর্থাৎ BC > EF

৩। যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয় কিন্তু তাহাদের ভূমি অসমান হয়, তবে যে ত্রিভুজের ভূমি বৃহত্তর তাহার দুই বাহুর অন্তর্ভূত কোণ অন্যের দুই বাহুর অন্তর্ভূত কোণ অপেক্ষা বড় হইবে।

(১ম চিত্র)

মনে কর, ABC, DEF দুটি ত্রিভুজ ইহাদের মধ্যে

AB = DE, AC = DF কিন্তু BC > EF

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle$BAC > $\angle$EDF

প্রমাণ *। DEF ত্রিভুজটিকে এরূপে রাখ যেন, E বিন্দু B বিন্দু উপর ; EF, BC এর উপর এবং D BCএর যে পার্শ্বে A অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে পড়ে। AD সংযুক্ত কর।

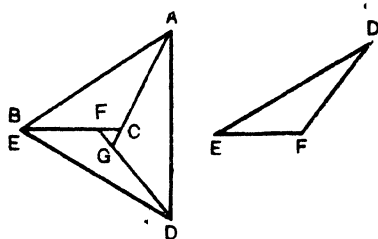
---

* এই প্রমাণের জন্য ভূতপূর্ব মহামান্য বিচারপতি স্যার আশুতোষ মুখোপাধ্যায় কেটি, সরস্বতী; এম. এ, ডি. এস. সি, ডি. এল, এফ. আর. এ. এস, এফ. আর. এস. ই, সি. এস. আই, এর নিকট ঋণী। তিনি ১৮৬৪ খৃষ্টাব্দে ২৯শে জুন তারিখে জন্মগ্রহণ করেন এবং ১৮৭৫ খৃষ্টাব্দে তাঁহার ১১ বৎসর বয়ঃক্রম কালে ইহা আবিষ্কার করেন।

মনে কর, DF ও AC G বিন্দুতে মিলিত হইল।

এখন ∠BAD = ∠BDA ; কারণ, BA = ED = BD

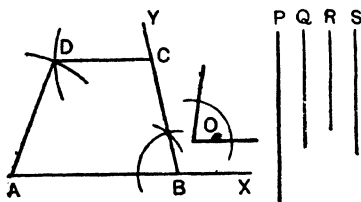
আবার, (১ম চিত্রে) DG > DF অর্থাৎ > AC > AG

∴ ∠DAG > ∠ADG ; ∴ ∠BAG > ∠BDG

(২য় চিত্র)

এবং (২য় চিত্রে) ঐ প্রকারে দেখান যাইতে পারে যে,

∠ADG > ∠DAG ; ∴ ∠BAG > ∠BDG.

অর্থাৎ ∠BAC > ∠EDF.

৪। কোন চতুর্ভুজের চারি বাহু এবং যে কোন এক কোণ নির্দিষ্ট আছে, চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, একটি চতুর্ভুজের চারি বাহু P, Q, R, S এই নির্দিষ্ট সরল রেখাগুলির সমান এবং উহার এক কোণ নির্দিষ্ট O কোণের সমান। চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

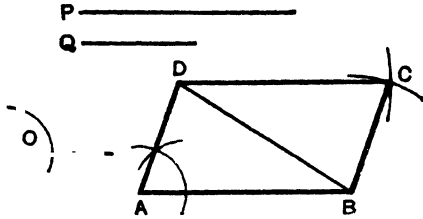
অঙ্কন। AX একটি সরল রেখা টানিয়া, উহা হইতে Pএর সমান AB অংশ ছেদ কর।

BA রেখার B বিন্দুতে O কোণের সমান ABY কোণ আঁক।

BY হইতে Qএর সমান BC অংশ কাট।

Cকে কেন্দ্র করিয়া Rএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক এবং Aকে কেন্দ্র করিয়া Sএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অন্য একটি চাপ আঁক। চাপ দুটি যেন D বিন্দুতে ছেদ করিল। CD, AD সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABCD উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ হইল।

৫। কোন সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ দেওয়া আছে, সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু দুটি P ও Q দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ নির্দিষ্ট O কোণের সমান। সামান্তরিকটি আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন। Pএর সমান AB একটি সরলরেখা টান। AB রেখার A বিন্দুতে O কোণের সমান BAD কোণ আঁক, AD যেন Qএর সমান হয়।

D ও B কে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে AB ও ADএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুটি চাপ আঁক, ইহারা যেন C বিন্দুতে ছেদ করিল।

DC ও BC সংযুক্ত কর।

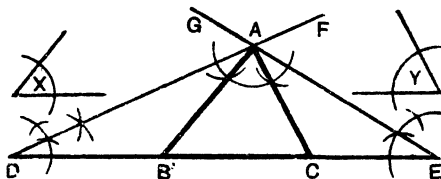
তাহা হইলে, ABCD উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ। BD সংযুক্ত কর। এখন দেখান যাইতে পারে যে, DCB ও BAD ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। অতএব $\angle BDC = \angle DBA$ এবং ইহারা একান্তর কোণ, সুতরাং DC ও AB সমান্তরাল।

সেইরূপ, BC ও AD সমান্তরাল, কারণ $\angle DBC =$ একান্তর $\angle BDA$.

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক, এবং ইহার

$AB = P$, $AD = Q$ এবং $\angle A = \angle O$.

৬। কোন ত্রিভুজের পরিসীমা এবং দুই কোণ নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি **অঙ্কিত করিতে হইবে।**

মনে কর, একটি ত্রিভুজের পরিসীমা DE এই নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান এবং দুই কোণ X ও Y দুটি নির্দিষ্ট কোণের সমান, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিশ্লেষণ। মনে কর, ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ ; ইহার পরিসীমা DE এর সমান এবং $\angle B = \angle X$ ও $\angle C = \angle Y$.

BCকে উভয়দিকে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন $BD = BA$ এবং $CE = CA$ হয়। DA, EA সংযুক্ত কর।

এখন, $\angle BDA = \angle DAB$, কারণ, $BD = BA$.

আবার, $\angle ABC = \angle BDA + \angle DAB$.

$\therefore \quad \angle BDA = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle X$.

সেইরূপ, $\angle CEA = \frac{1}{2}\angle Y$.

অতএব, অঙ্কনের নিম্নলিখিত পন্থা স্থির হয়।

অঙ্কন। DE রেখার D বিন্দুতে X কোণের অর্ধেকের সমান $\angle EDF$ এবং E বিন্দুতে Y কোণের অর্ধেকের সমান DEG কোণ আঁক।

DF ও EG যেন A বিন্দুতে ছেদ করিল।

AD রেখার A বিন্দুতে EDA কোণের সমান $\angle DAB$ এবং AE রেখার A বিন্দুতে DEA কোণের সমান EAC কোণ আঁক।

AB, AC যেন DEকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

বিবিধ অনুশীলনী ১

১। চতুর্ভুজের কোন কর্ণ অন্য কর্ণকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করিলে, উহা চতুর্ভুজটিকে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করিবে।

২। ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যে যথাক্রমে D, E, F তিনটি বিন্দু সংযুক্ত করিলে যদি উৎপন্ন ত্রিভুজ সমবাহু হয়, তবে প্রমাণ কর যে EAF, FBD, DCE ত্রিভুজগুলি পরস্পর সর্বসম হইবে।

৩। সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপরটির দ্বিগুণ হইলে, প্রমাণ কর যে, উহার অতিভুজ ক্ষুদ্রতম বাহুটির দ্বিগুণ হইবে।

৪। বিষমভুজ ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক ভূমিকে যে দুই অংশে বিভক্ত করে তাহাদের বৃহত্তর অংশ বৃহত্তর বাহুর সংলগ্ন হইবে।

৫। স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহু অন্য দুই বাহুর অন্তঃস্থ যে কোনও দুই বিন্দু সংযোজক সরলরেখা অপেক্ষা বড় হইবে।

৬। ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোন বিন্দুর সহিত উহার যে কোনও বাহুর প্রান্ত বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা দুটি একত্রযোগে ত্রিভুজের অন্য দুইবাহুর সমষ্টি অপেক্ষা ছোট হইবে কিন্তু তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ বৃহত্তর হইবে।
(ইউক্লিড ১, ২১)

৭। ABCD একটি সমবাহু চতুর্ভুজ হইলে প্রমাণ কর যে, B, D এবং AC কর্ণের মধ্যবিন্দু একরেখীয় হইবে।

৮। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AD মধ্যমা E পর্যন্ত বর্ধিত হইল যেন DE = AD. E বিন্দুর সহিত AB ও ACএর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা দুটি BCকে F ও G বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, AFEG একটি সমবাহু চতুর্ভুজ।

৯। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে সমান বাহুদ্বয়ের উপর পাতিত লম্বদুটির সমষ্টি ভূমির যে কোন প্রান্তবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্বের সমান।

১০। সমবাহু ত্রিভুজের তিন বাহু হইতে উহার অন্তঃস্থ কোন বিন্দুর দূরত্বের সমষ্টি উহার যে কোন বাহু হইতে বিপরীত শীর্ষের দূরত্বের সমান।

১১। কোন সামান্তরিকের চারি কোণের দ্বিখণ্ডক দ্বারা উৎপন্ন

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান এবং মূল সামান্তরিকের বাহুর সহিত সমান্তরাল।

১২। যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয় এবং উহাদের এক জোড়া সমান বাহুর বিপরীত কোণ দুটি পরস্পর সম্পূরক হয়, তবে অপর জোড়া সমান বাহুর বিপরীত কোণ দুটি সমান হইবে।

১৩। ত্রিভুজের শিরঃকোণ দ্বিখণ্ডক এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর পাতিত লম্বের অন্তর্ভূত কোণ উহার ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তরের অর্ধেক।

১৪। ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমি পর্যন্ত অঙ্কিত যে কোনও সরলরেখা ত্রিভুজের অন্য দুই বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

১৫। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক দুটি অন্য দুই বাহুকে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের সংযোজক সরলরেখা ভূমির সমান্তরাল হইবে।

১৬। চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির দ্বিখণ্ডক এবং উহার কর্ণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক সরলরেখাগুলি সমবিন্দু হইবে এবং পরস্পর দ্বিখণ্ডিত হইবে।

১৭। ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম মধ্যমা বৃহত্তম বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করে।

১৮। D, E ও F যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু। FG, BE এর সমান্তরাল এবং বর্ধিত DE কে G বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, CFG ত্রিভুজের বাহুগুলি ABC ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটির সমান হইবে।

ইহা হইতে (বা অন্য প্রকারে) প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যে কোন দুই মধ্যমার সমষ্টি উহার তৃতীয় মধ্যমা অপেক্ষা বড়।

১৯। ট্রাপিজিয়মের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা উহার সমান্তরাল বাহু দুটির সমান্তরাল এবং তাহাদের অন্তরের অর্ধেক।

২০। ত্রিভুজের যে কোন দুই কোণের দ্বিখণ্ডক উহাদের বিপরীত বাহুদ্বারা সীমাবদ্ধ হইয়া সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

(সম্পাদ্য)

২১। কোন ত্রিভুজের পরিসীমা নির্দিষ্ট আছে এবং উহার কোণগুলি একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের কোণের সমান দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২২। সমকোণী ত্রিভুজের পরিসীমা এবং উহার একটি সূক্ষ্মকোণের পরিমাণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২৩। সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের পরিসীমা দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২৪। একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সহিত সর্বসম হয় এইরূপ একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

২৫। বর্গক্ষেত্রের একটি কর্ণ দেওয়া আছে বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

২৬। রম্বসের কর্ণ দুটি দেওয়া আছে, রম্বসটি অঙ্কিত কর।

২৭। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু তিনটি নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২৮। ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখাত্রয়ের পরিমাণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২৯। দেওয়া আছে যে, $a+b+c=$ ১৮ সেঃ মিঃ, A = ৬০° এবং B = ৬২°। ABC ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৩০। ABC এমন একটি ত্রিভুজ আঁক যেন উহার $a=$ ৩·২″, $b+c=$ ৬·৮″ এবং B = ৬০° হয়। b ও c এর দৈর্ঘ্য মাপিয়া নির্ণয় কর। ইহা কিরূপ ত্রিভুজ?

৩১। ABC এমন একটি ত্রিভুজ আঁক যেন উহার $a=$ ২·৫″, A = ৫০°, ও B = ৬০° হয়। এবং উহার শীর্ষত্রয় হইতে বিপরীত বাহুরগুলির উপর লম্ব টান।

৩২। AB = ৩ সেঃ মিঃ, BC = ৪ সেঃ মিঃ, CD = ৫ সেঃ মিঃ, DA = ৬ সেঃ মিঃ এবং A = ৪৫° দেওয়া আছে। ABCD চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

৩৩। AB = ২·৫″, BC = ৩″, CD = ৩·৫″, DA = ৪″ এবং AC = ৪·৫″ দেওয়া আছে। ABCD চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

দ্বিতীয় ভাগ

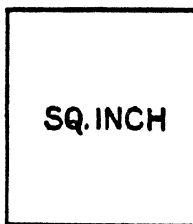
প্রথম অধ্যায়

প্রথম পরিচ্ছেদ

ক্ষেত্রফল

কোনও ক্ষেত্র যে পরিমাণ স্থান অধিকার করিয়া থাকে তাহাকে ঐ ক্ষেত্রের **ক্ষেত্রফল** বা **কালি** (Area) বলে।

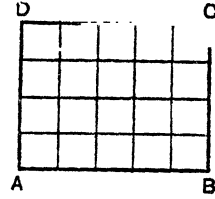
যে বর্গক্ষেত্রের বাহু এক ইঞ্চি তাহার ক্ষেত্রফলকে এক **বর্গ ইঞ্চি** (Square Inch) বলে।

SQ. INCH

সেইরূপ যে বর্গক্ষেত্রের বাহু এক হাত তাহার ক্ষেত্রফল বা কালি এক বর্গহাত, যে বর্গক্ষেত্রের বাহু এক ফুট তাহার কালি এক বর্গফুট ইত্যাদি।

আবার, যেরূপ কোন রেখার দৈর্ঘ্য ইঞ্চি, ফুট, হাত ইত্যাদি যে কোনও এককে প্রকাশ করা হয়, সেইরূপ কোনও ক্ষেত্রের কালি বর্গইঞ্চি, বর্গফুট, বর্গহাত ইত্যাদি যে কোনও এককে প্রকাশিত হইয়া থাকে।

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

মনে কর, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র ; উহার দৈর্ঘ্য AB = ৫ ইঞ্চি, এবং প্রস্থ AD = ৪ ইঞ্চি।

AB কে ৫ সমান অংশে এবং AD কে ৪ সমান অংশে বিভক্ত কর। তাহা হইলে উহাদের প্রত্যেক অংশের পরিমাণ এক ইঞ্চি হইল।

প্রত্যেক ছেদবিন্দু হইতে বাহুগুলির সমান্তরাল করিয়া সরলরেখা টান। এখন আয়তক্ষেত্রটি কতকগুলি বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইল। প্রত্যেক সারিতে ৫টি করিয়া বর্গক্ষেত্র ধরিলে, এইরূপ ৪ সারি বর্গক্ষেত্র আয়তক্ষেত্রটির ভিতরে আছে। অতএব, আয়তক্ষেত্রটির ভিতরে মোট ৫ × ৪ বা ২০টি বর্গক্ষেত্র আছে। বর্গক্ষেত্রগুলির প্রত্যেকটি দ্বারা এক বর্গ ইঞ্চি বুঝায়। অতএব আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল ৫ × ৪ বা ২০ বর্গইঞ্চি।

সেইরূপ যে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য '**a**' একক এবং প্রস্থ '**b**' একক তাহার ক্ষেত্রফল $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ বা **ab** বর্গ একক। অতএব,

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ।

দ্রষ্টব্য ১। যে বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ '**a**' একক তাহার ক্ষেত্রফল $\mathbf{a}^2$ বর্গ একক।

দ্রষ্টব্য ২। যে সকল আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ সমান তাহাদের ক্ষেত্রফলও সমান। অতএব কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ অর্থাৎ (উহার দুটি সন্নিহিত বাহু) দ্বারা উহার আকৃতি ও আয়তন নির্দিষ্ট হইয়া থাকে।

এইজন্য ABCD একটি আয়তক্ষেত্রকে, AB, AD এর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র বলিয়া নির্দেশ করা হইয়া থাকে, এবং সংক্ষেপে উহাকে **আয়ত** AB· AD বা **আয়তক্ষেত্র** AC অথবা শুধু AB· AD বলা হয়।

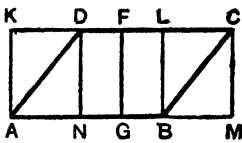
সেইরূপ AB এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রকে সংক্ষেপে **AB এর বর্গক্ষেত্র** বা শুধু AB^2 বলা যায়।

সংজ্ঞা। একটি সামান্তরিককে উহার যে বাহুর উপর দণ্ডায়মান আছে মনে করা যায়, ঐ বাহুকে উহার **ভূমি** (base) বলে।

মন্তব্য। সামান্তরিকের যে কোনও বাহুই ভূমি হইতে পারে।

সংজ্ঞা। সামান্তরিকের ভূমি এবং উহার বিপরীত বাহুর মধ্যের লম্ব-দূরত্বকে সামান্তরিকের **উন্নতি** বা **উচ্চতা** (altitude) বলে।

K D F L C

A N G B M

যেমন, পার্শ্বের চিত্রে ABCD একটি সামান্তরিক, AB উহার ভূমি এবং DN উহার উন্নতি; D হইতে AB এর উপর DN লম্ব।

সেইরূপ AK, FG, BL, CM ইহাদের প্রত্যেকেই AB ভূমি বিশিষ্ট ABCD সামান্তরিকের উন্নতি। কারণ AK, FG, BL, CM ইহাদের প্রত্যেকেই AB বা বর্ধিত AB এর উপর লম্ব; অতএব ইহারা CD বা বর্ধিত CD এর উপরও লম্ব। সুতরাং ইহাদের প্রত্যেকেই AB ও CD এর মধ্যের দূরত্ব বুঝায়। আবার দেখ AK, BL, CM, DN, FG ইহারা পরস্পর সমান; কারণ, ইহারা AKLB, AKCM, AKDN বা AKFG, সামান্তরিকের বিপরীত বাহু।

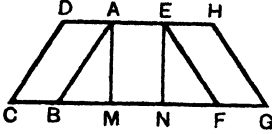
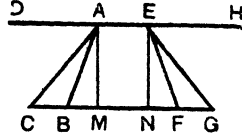
সংজ্ঞা। কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে উহার ভূমির উপর পাতিত লম্বের পরিমাণকে ঐ ত্রিভুজের **উন্নতি** বা **উচ্চতা** (altitude) বলে।

A

B D C

যেমন পার্শ্বের চিত্রে ABC ত্রিভুজের BC ভূমি এবং AD উহার উন্নতি; A হইতে BC এর উপর AD লম্ব। সুতরাং AD দ্বারা BC হইতে A বিন্দুর দূরত্ব বুঝায়।

দ্রষ্টব্য ১। যে সকল সামান্তরিক (বা ত্রিভুজ) দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত তাহাদের উন্নতি পরস্পর সমান।

কারণ, মনে কর প্রথম চিত্রে AM এবং EN, যথাক্রমে ABCD, ও EFGH সামান্তরিক দুটির উন্নতি অথবা, দ্বিতীয়চিত্রে, AM ও EN

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র)

যথাক্রমে ABC, EFG ত্রিভুজ দুটির উন্নতি এবং ইহারা CG ও DH এই দুই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত।

এখন স্পষ্টই AMNE একটি আয়তক্ষেত্র ; $\therefore$ AM = EN.

দ্রষ্টব্য ২। যে সকল সামান্তরিকের (বা ত্রিভুজের) উন্নতি পরস্পর সমান তাহাদিগকে দুই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে স্থাপিত করা যায়।

মনে কর উপরের প্রথমচিত্রে ABCD ও EFGH সামান্তরিক দুটির উন্নতি পরস্পর সমান অর্থাৎ AM = EN. উহাদিগকে এইরূপে রাখ যেন উহাদের ভূমি একই সরলরেখার উপর পড়ে এবং উহারা ঐ সরলরেখার একই পার্শ্বে পড়ে।

AE সংযুক্ত কর।

এখন AE ও MN সমান্তরাল, কারণ AM ও EN সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ AE ও CG সমান্তরাল।

$\therefore$ DAEH ও CG সমান্তরাল।

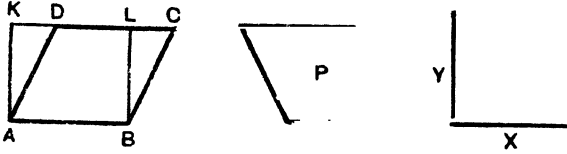
কারণ, DA, AE, EH ইহাদের প্রত্যেকেই CG এর সমান্তরাল, সুতরাং DAEH একই সরলরেখা।

অর্থাৎ ABCD, EFGH সামান্তরিক দুটি DH ও CG এই দুই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে স্থাপন করা হইল।

ঐ প্রকার ত্রিভুজ সম্বন্ধেও প্রমাণ করা যাইতে পারে।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ—উপপাদ্য

উপপাদ্য ২৬

যে সকল সামান্তরিক একই ভূমিতে বা সমান সমান ভূমিতে অবস্থিত এবং একই বা সমান সমান উন্নতি বিশিষ্ট, তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

মনে কর ABCD এবং P দুটি সামান্তরিক, ইহারা একই ভূমি AB তে বা সমান সমান ভূমিতে অবস্থিত, এবং মনে কর, ইহাদের একই বা সমান সমান উন্নতি।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

ক্ষেত্রফলেতে ABCD সামান্তরিক = P সামান্তরিক।

অঙ্কন। এমন দুইটি X ও Y সরলরেখা লও যাহাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ABCD সামান্তরিকের (সুতরাং P সামান্তরিকেরও) ভূমি এবং উন্নতির সমান। CD অথবা বর্ধিত CDএর উপর AK এবং BL লম্ব টান।

প্রমাণ। ADK ও BCL ত্রিভুজের মধ্যে,

∵ $\angle ADK = \angle BCL$, AD ও BC সমান্তরাল বলিয়া,
$\angle AKD = \angle BLC$, সমকোণ বলিয়া,
এবং AD = BC, সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলিয়া,

∴ Δ ADK = Δ BCL (উপ ১৫)

এখন, KABC ট্রাপিজিয়ম হইতে সমান সমান Δ ADK ও Δ BCL, বিয়োগ করিলে, বিয়োগফলগুলি পরস্পর সমান হইবে।

∴ ABCD সামান্তরিক = ABLK আয়তক্ষেত্র

= আয়ত AB. AK = আয়ত X.Y

কারণ, AB = X এবং AK = ABCD সামান্তরিকের উন্নতি = Y.

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, P সামান্তরিক = আয়ত X.Y

∴ ক্ষেত্রফলেতে, ABCD সামান্তরিক = P সামান্তরিক।

অনু ১। যে সকল সামান্তরিক একই ভূমিতে এবং একই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত, তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

কারণ, তাহারা একই উন্নতি বিশিষ্ট।

অন্য প্রকার। (উপপাদ্য ২৬এর সাহায্য ব্যতীত)

(উপপাদ্য ২৬এর বাম দিকের চিত্র দেখ।)

মনে কর ABCD ও ABLK দুটি সামান্তরিক, ইহাদের একই ভূমি AB, এবং ইহারা AB, KC সমান্তরাল রেখা দুটির মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABCD সামান্তরিক = ABLK সামান্তরিক।

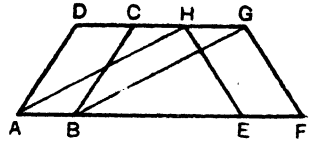
প্রমাণ। ADK, BCL ত্রিভুজের মধ্যে

∵ { $\angle ADK = \angle BCL$, AD ও BC সমান্তরাল বলিয়া,
$\angle AKD = \angle BLC$, AK ও BL " "
এবং AD = BC, সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলিয়া,

∴ $\triangle ADK = \triangle BCL$.

ABCK ট্রাপিজিয়ম হইতে সমান সমান $\triangle$ ADK ও $\triangle$ BCL বাদ দাও, তাহা হইলে ABCD সামান্তরিক = ABLK সামান্তরিক।

অনু ২। যে সকল সামান্তরিক সমান সমান ভূমিতে এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত, তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

মনে কর, ABCD, EFGH দুটি সামান্তরিক, ইহাদের AB ও EF, ভূমিদ্বয়, সমান এবং ইহারা উভয়েই AF ও DG সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABCD সামান্তরিক = EFGH সামান্তরিক।

প্রমাণ। AH ও BG সংযুক্ত কর। এখন, AB = EF = HG, এবং AB ও HG সমান্তরাল বলিয়া, AH ও BG সমান এবং সমান্তরাল।

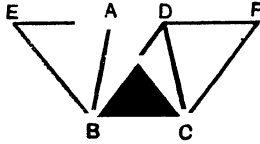
∴ ABCD সামান্তরিক = ABGH সামান্তরিক

= EFGH সামান্তরিক। (উপ ২৬, অনু ১)

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল। উপপাদ্য ২৬এর প্রমাণে দেখান হইয়াছে, ক্ষেত্রফলে ABCD সামান্তরিক = ABLK আয়তক্ষেত্র = AB × AK

∴ **সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উন্নতি**।

উপপাদ্য ২৭

যে সকল ত্রিভুজ (১) একই ভূমিতে অবস্থিত অথবা (২) সমান সমান ভূমিতে অবস্থিত এবং একই অথবা সমান সমান উন্নতি বিশিষ্ট, তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

(১) মনে কর, ABC ও DBC দুটি ত্রিভুজ, ইহাদের একই ভূমি BC এবং ইহারা একই অথবা সমান সমান উন্নতি বিশিষ্ট।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ক্ষেত্রফলেতে Δ ABC = Δ DBC.

অঙ্কন। BCAE এবং BCFD সামান্তরিক দুটি আঁক।

প্রমাণ। যেহেতু, BCAE সামান্তরিকের উন্নতি
= Δ ABCএর উন্নতি
= Δ DBC „ „
= BCFD সামান্তরিকের উন্নতি

এবং BCAE ও BCFD সামান্তরিক দুটির একই ভূমি BC,

$\therefore$ BCAE সামান্তরিক = BCFD সামান্তরিক (উপ ২৬)

কিন্তু Δ ABC = BCAE সামান্তরিকের অর্ধেক
এবং Δ DBC = BCFD সামান্তরিকের অর্ধেক } (উপ ২৪)

$\therefore$ Δ ABC = ΔDBC

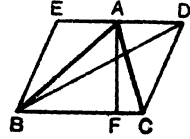
(২) এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, যে সকল ত্রিভুজ সমান সমান ভূমিতে অবস্থিত এবং একই অথবা সমান সমান উন্নতি বিশিষ্ট তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

অনু ১। যে সকল ত্রিভুজের একই ভূমি এবং যাহারা একই সামন্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত, তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

অনু ২। যে সকল ত্রিভুজের সমান সমান ভূমি এবং যাহারা একই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত, তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

অনু ৩। একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমিতে অবস্থিত এবং উহারা একই উন্নতি বিশিষ্ট হইলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

মনে কর △ABC ও BCDE সামান্তরিকের একই ভূমি BC এবং একই উন্নতি AF.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, △ABC = $\frac{1}{2}$ BCDE সামান্তরিক। BD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। যেহেতু △ ABC এর উন্নতি
= BCDE সামান্তরিকের উন্নতি
= △DBC এর উন্নতি।

এবং △ ABC ও △ DBC এর একই ভূমি BC

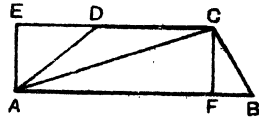
∴ △ ABC = △ DBC
= BCDE সামান্তরিকের অর্ধেক। (উপ ২৪)

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল। তৃতীয় অনুসিদ্ধান্ত হইতে পাওয়া যায় যে,

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × BCDE সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।
= $\frac{1}{2}$ (ভূমি × উন্নতি)

∴ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (ভূমি × উন্নতি)।

যথা, যে ত্রিভুজের ভূমি ২০ ফুট এবং উন্নতি ১৫ ফুট তাহার ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}$ × ২০ × ১৫ বা ১৫০ বর্গফুট।

ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল। মনে কর ABCD একটি ট্রাপিজিয়ম্, AB ও CD ইহার সমান্তরাল বাহু দুটি। AC সংযুক্ত কর, এবং CF ও AE যথাক্রমে AB ও CD বা বর্ধিত CD এর উপর লম্ব টান।

এখন, ABCD এর ক্ষেত্রফল
= △ABC + △ACD.

$=\frac{1}{2}AB\times CF+\frac{1}{2}CD\times AE$

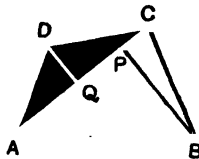
$=\frac{1}{2}(AB+CD)\ CF.$

কারণ, CF = AE = ABCD এর উন্নতি।

∴ ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল

= (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধেক) × উন্নতি।

যথা, যে ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য ৫ ফুট ও ৭ ফুট এবং উন্নতি ৩ ফুট তাহার ক্ষেত্রফল = ½ (৫ + ৭) × ৩ বা ১৮ বর্গফুট।

চতুর্ভুর্জের ক্ষেত্রফল। মনে কর ABCD একটি চতুর্ভুর্জ, AC সংযুক্ত কর এবং B ও D হইতে AC এর উপর BP ও DQ লম্ব টান।

এখন মনে কর AC এর দৈর্ঘ্য d একক এবং BP ও DQ এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p ও q একক, তাহা হইলে,

ABCD চতুর্ভুর্জের ক্ষেত্রফল = △ABC + △ACD

$=\frac{1}{2}AC.\ BP+\frac{1}{2}AC.\ DQ$

$=\frac{1}{2}dp+\frac{1}{2}dq=\frac{1}{2}d(p+q)$

মন্তব্য। চতুর্ভুর্জের কর্ণদ্বয় পরস্পরের লম্ব হইলে,

উহার ক্ষেত্রফল = কর্ণদ্বয়ের গুণফলের অর্ধেক।

উদা ১। ABCD চতুর্ভুর্জের AC = ১৫ ফুট, এবং B ও D হইতে AC এর উপর পাতিত লম্ব দুটি যথাক্রমে ৫ ফুট ও ৭ ফুট হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত ?

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = ½ × ১৫ × (৫ + ৭) বা ½ × ১৫ × ১২ বা ৯০ বর্গফুট।

উদা ২। রম্বসের কর্ণদ্বয় যথাক্রমে ৮″ ও ৯″ হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত ?

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরের লম্ব, অতএব নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = ½ × ৮ × ৯ বা ৩৬ বর্গইঞ্চি।

উপপাদ্য ২৮

যে সকল ত্রিভুজ একই ভূমিতে বা সমান সমান ভূমিতে অবস্থিত, তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান হইলে, উন্নতিও সমান হইবে।

মনে কর, P ও Q ত্রিভুজ দুইটি একই ভূমিতে অথবা সমান সমান ভূমিতে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, P ত্রিভুজের উন্নতি = Q ত্রিভুজের উন্নতি।

প্রমাণ। P ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}$ (△ P এর ভূমি) × (△ P এর উন্নতি)

এবং Q ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}$ (△ Q এর ভূমি) × (△ Q এর উন্নতি)

কিন্তু দেওয়া আছে যে, △ P = △ Q.

∴ $\frac{1}{2}$ (△ P এর ভূমি) × (△ P এর উন্নতি)

$=\frac{1}{2}$ (△ Q এর ভূমি) × (△ Q এর উন্নতি)

কিন্তু দেওয়া আছে যে, △ P এর ভূমি = △ Q এর ভূমি

∴ △ P এর উন্নতি = △ Q এর উন্নতি)

অনুসিদ্ধান্ত। যে সকল ত্রিভুজ একই ভূমিতে এবং ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত, তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান হইলে, তাহারা একই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত হইবে।

দ্রষ্টব্য। উপপাদ্য ২৮, উপপাদ্য ২৭ এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা। উহার অপর বিপরীত প্রতিজ্ঞা এই,

যে সকল ত্রিভুজের একই বা সমান সমান উন্নতি তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান হইলে, ভূমিও সমান হইবে।

অনুশীলনী ১৪

(উপপাদ্য ২৬—২৮)

১। সামান্তরিকের যে কোন দুই বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা উহাকে দুই সমান অংশে বিভক্ত করে। ঐ দুই অংশ সর্বসম দেখাইতে পার কি ?

২। ত্রিভুজের যে কোন মধ্যমা উহাকে দ্বিখণ্ডিত করে।

৩। ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমার মধ্যে P যে কোন বিন্দু হইলে প্রমাণ কর যে ACP, ABP ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

৪। ABC ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমার সম্পাতবিন্দু G হইলে, প্রমাণ কর যে, AGB, BGC, CGA ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

ইহা হইতে দেখাও যে, ত্রিভুজের শীর্ষগুলি হইতে সরলরেখা টানিয়া কিরূপে উহাকে ত্রিখণ্ডিত করা যায় ?

৫। সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় উহাকে সমান চারি অংশে বিভক্ত করে।

৬। সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যে কোনও সরলরেখা টানিলে তাহা সামান্তরিককে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

এখন বলত, কোন সামান্তরিককে কিরূপে এমন একটি সরলরেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত করা যায়, যাহা

(১) একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে,

(২) একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত সমান্তরাল হইবে,

(৩) সামান্তরিকের যে কোন বাহুর উপর লম্ব হইবে।

৭। AB ও CD সরলরেখা দুইটি E বিন্দুতে ছেদ করিলে, যদি AEC ও BED ত্রিভুজ দুইটি সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে, BC ADএর সমান্তরাল হইবে।

৮। ABCD সামান্তরিকের ভিতরে O যে কোনও বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে, AOB ও COD ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফল একত্রযোগে ABCD এর ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

৯। সমান সমান উন্নতি বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজের ভূমি অসমান হইলে, বৃহত্তর ভূমি বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বৃহত্তর হইবে।

১০। ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা উহাকে দুই সমান অংশে বিভক্ত করে।

১১। চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় উহাকে চারিটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করিলে, প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হইবে।

১২। ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা উহার তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হইবে।

১৩। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা উহাকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট চারিটি ত্রিভুজে বিভক্ত করিবে।

১৪। চতুর্ভুজের যে কোন কর্ণ উহাকে দ্বিখণ্ডিত করিলে, চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হইবে।

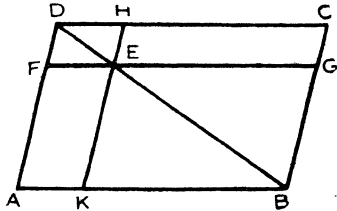
১৫। ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে উহা অন্য বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

১৬। সমবাহু ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোনও বিন্দু হইতে উহার বাহুগুলির উপর পাতিত লম্বত্রয়ের সমষ্টি ঐ বিন্দুর সকল অবস্থানের জন্যই এক হইবে।

১৭। দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয় এবং সমান সমান বাহুর অন্তর্ভূত কোণ দুটি পরস্পরের সম্পূরক হয় তবে ত্রিভুজ দুটি ক্ষেত্রফলে সমান হইবে।

১৮। চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু ক্রমান্বয়ে সংযুক্ত করিলে উৎপন্ন সামান্তরিক চতুর্ভুজের অর্ধেক হইবে।

সংজ্ঞা। সামান্তরিকের কোন কর্ণের অন্তর্গত কোনও বিন্দু দিয়া উহার বাহুগুলির সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে সামান্তরিকটি যে চারিটি সামান্তরিকে বিভক্ত হয় তাহাদের মধ্যে যে দুটির কর্ণ মূল সামান্তরিকের কর্ণের সহিত মিলিয়া থাকে তাহাদিগকে ঐ

কর্ণের পরিতঃস্থ সামান্তরিক (Parallelograms about the diagonal) বলে এবং অপর দুটিকে প্রথমোক্ত দুটির **পূরক** (Complementary) বলে। যথা, উপরের চিত্রে FH ও KG

সামান্তরিক দুটি AC সামান্তরিকের BD কর্ণের পরিতঃস্থ এবং AE ও EC সামান্তরিক দুটি উহাদের পূরক।

১৯। কোন সামান্তরিকের কর্ণের পরিতঃস্থ সামান্তরিকদ্বয়ের পূরক সামান্তরিক দুটির ক্ষেত্রফল সমান।

২০। চতুর্ভুজের কোন কর্ণদ্বারা চতুর্ভুজটি দ্বিখণ্ডিত হইলে, প্রমাণ কর যে, উহার দ্বিতীয় কর্ণও প্রথমটির দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

২১। ক্ষেত্রফলেতে সমান দুটি ত্রিভুজ একই ভূমির বিপরীত পার্শ্বে থাকিলে, প্রমাণ কর যে, তাহাদের শীর্ষদ্বয় সংযোজক সরলরেখা উহাদের সাধারণ ভূমি বা বর্ধিত ভূমি দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে। ইহা হইতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা এক বিন্দুতে মিলিত হয়।

(সংখ্যামূলক)

২২। নিম্নলিখিত ভূমি ও উন্নতি বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর,

(১) ভূমি = ১২″, উন্নতি = ৭″

(২) ভূমি = ২৫ সেঃ মিঃ, উন্নতি = ১৪ সেঃ মিঃ।

২৩। যে সামান্তরিকের ভূমি ৬ ফুট এবং উন্নতি ২½ ফুট তাহার ক্ষেত্রফল কত ?

২৪। যে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল ১০৩ বর্গ একক ও ভূমি ৩৪ একক, তাহার উন্নতি কত ?

২৫। যে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ২৫৭ বর্গ একক ও ভূমি ২৪ একক, তাহার উন্নতি কত ?

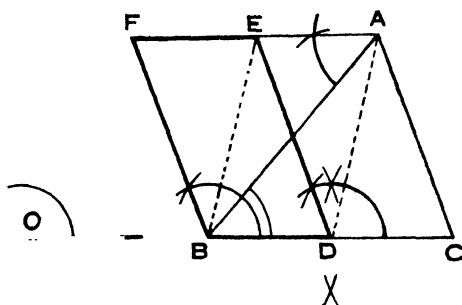
২৬। যে রম্বসের কর্ণ দুটি ১৪ ইঞ্চি ও ১৭ ইঞ্চি, তাহার ক্ষেত্রফল কত ?

২৭। ABCD চতুর্ভুজের AC কর্ণ = ৫০ সেঃ মিঃ এবং B ও D হইতে ACএর উপর পাতিত লম্বের পরিমাণ যথাক্রমে ২৩ সেঃ মিঃ ও ২৭ সেঃ মিঃ হইলে, উহার কালি কত ?

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা

সম্পাদ্য ১৩

এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং যাহার এক কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

মনে কর, একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা ABC ত্রিভুজের সমান এবং যাহার এক কোণ O কোণের সমান।

অঙ্কন। BCকে D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর (সম্পাদ্য ২) এবং O কোণের সমান করিয়া DBF কোণ আঁক (সম্পাদ্য ৫)।

D ও A হইতে BF ও CB এর সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে DE ও AF রেখা টান (সম্পাদ্য ৬)। AF যেন DEকে E বিন্দুতে এবং BFকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, BDEF উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ। AD সংযুক্ত কর।

এখন, BD DC এর সমান বলিয়া, ΔABD = ΔADC (উপ ২৭)

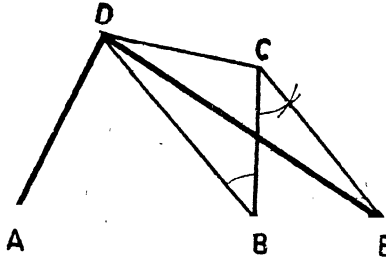
$\therefore$ ΔABC = ΔABD এর দ্বিগুণ

আবার, BDEF সামান্তরিক = ΔABD এর দ্বিগুণ ;

কারণ, উহাদের একই ভূমি এবং উহারা একই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত। (উপ ২৭, অনু ৩)

অতএব, BDEF সামান্তরিক ABC ত্রিভুজের সমান এবং উহার DBF কোণ O কোণের সমান।

সম্পাদ্য ১৪

কোন নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, ABCD একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ, ইহার সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। BD সংযুক্ত কর।

C হইতে BD এর সমান্তরাল করিয়া CE রেখা টান, ইহা যেন বর্ধিত ABকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

DE সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, DAE উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। এখন ΔBED = ΔBCD ;

কারণ, উহাদের একই ভূমি BD এবং উহারা একই সমান্তরাল সরলরেখা BD ও CE এর মধ্যে অবস্থিত। (উপ ২৭, অনু ১)

উভয়দিকে Δ DAB যোগ কর।

তাহা হইলে, Δ DAE = ABCD চতুর্ভুজ।

সম্পাদ্য ১৫

কোন নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর ABCDE একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র, ইহার সমান একটি ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন। AD সংযুক্ত কর।

E বিন্দু দিয়া AD এর সমান্তরাল EF রেখা টান, ইহা যেন বর্ধিত CDকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

AF সংযুক্ত কর।

এখন, ADE, ADF ত্রিভুজ দুটির একই ভূমি AD এবং ইহারা একই সমান্তরাল সরলরেখা AD ও EF এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \quad \triangle ADE = \triangle ADF$

উভয়দিকে ABCD ক্ষেত্র যোগ কর, তাহা হইলে, ABCDE ক্ষেত্র ABCF ক্ষেত্রের সমান হইল এবং ABCF এর বাহুসংখ্যা ABCDE এর বাহুসংখ্যা হইতে এক কম হইল।

এই প্রকারে যে কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুসংখ্যা ক্রমান্বয়ে এক এক করিয়া কমাইয়া উহার সমান ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

অনু। একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান এমন একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে, যেন উহার বাহুসংখ্যা প্রদত্ত ক্ষেত্রের বাহুসংখ্যা অপেক্ষা এক কম হয়।

বিবিধ সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা

১। একটি ত্রিভুজের কোন এক বাহুর অন্তঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া উহাকে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং P ইহার BC বাহুর অন্তঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। P বিন্দু হইতে এমন একটি সরলরেখা টানিতে হইবে যাহা ABC ত্রিভুজকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

অঙ্কন। AP সংযুক্ত কর, এবং BCকে D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। D হইতে AP এর সমান্তরাল করিয়া DF রেখা টান, উহা যেন ABকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। PF সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে PF, ABC ত্রিভুজকে দ্বিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ। কারণ, $\triangle PDF = \triangle ADF$ (উপ. ২৭ অনু ১)

উভয় পার্শ্বে $\triangle BDF$ যোগ কর,

তাহা হইলে, $\triangle PBF = \triangle ABD = \frac{1}{2}\triangle ABC.$

২। একটি ত্রিভুজের কোন এক বাহুর অন্তঃস্থ এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটি ত্রিখণ্ডিত * করিতে হইবে।

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ এবং P ইহার BC বাহুর অন্তঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

P হইতে সরলরেখা টানিয়া ABC ত্রিভুজটি ত্রিখণ্ডিত করিতে হইবে।

* তিন সমান অংশে বিভক্ত করাব নাম ত্রিখণ্ডন।

অঙ্কন। AP সংযুক্ত কর এবং D ও E বিন্দুতে BCকে ত্রিখণ্ডিত কর।

D এবং E হইতে AP এর সমান্তরাল করিয়া DF ও EG রেখা টানিলে, উহারা যেন যথাক্রমে ABকে F বিন্দুতে এবং AC কে G বিন্দুতে ছেদ করিল। PF ও PG সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, PF ও PG, $\triangle$ABCকে ত্রিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ। AD, AE সংযুক্ত কর।

এখন, BD = DE = EC বলিয়া,

$\triangle ABD = \triangle ADE = \triangle AEC = \frac{1}{3}\triangle ABC$

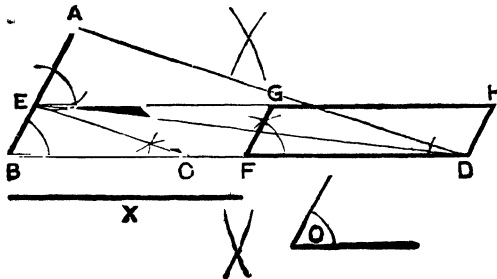
আবার, $\triangle PDF = \triangle ADF$, কারণ ইহাদের একই ভূমি DF এবং ইহারা একই সমান্তরাল সরলরেখা DF ও AP এর মধ্যে অবস্থিত।

উভয়দিকে $\triangle$BDF যোগ কব। (উপ ২৭, অনু ১)

তাহা হইলে, $\triangle BPF = \triangle ABD = \frac{1}{3}\triangle ABC.$

এই প্রকারে দেখান যায় যে, $\triangle CPG = \frac{1}{3}\triangle ABC.$

এবং অবশিষ্ট AFPG ক্ষেত্র $= \frac{1}{3}\triangle ABC.$

৩। কোন নির্দিষ্ট ভূমি বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং যাহার এক কোণ এক নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

মনে কর, নির্দিষ্ট ভূমির দৈর্ঘ্য X, ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং $\angle$O নির্দিষ্ট কোণ। এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ভূমির পরিমাণ X ও এক কোণ O কোণের সমান এবং যাহা ABC ত্রিভুজের সমান।

অঙ্কন। BC কিংবা বর্ধিত BC হইতে 2X এর সমান করিয়া BD

অংশচ্ছেদ কর। AD সংযুক্ত কর। C হইতে AD এর সমান্তরাল CE টান; CE যেন AB এর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইল।

E হইতে BD এর সমান্তরাল EGH টান। BDকে F বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর; F বিন্দুতে $\angle O$ এর সমান করিয়া DFG কোণ আঁক।

D হইতে FG এর সমান্তরাল DH রেখা টান, ইহা যেন EGHকে H বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, DFGH উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হইল।

[কারণ, DE সংযুক্ত করিয়া দেখান যাইতে পারে যে, DFGH সামান্তরিক $= \triangle BDE = \triangle ABC$.]

অনুশীলনী ১৫

১। একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান একটি আয়তক্ষেত্র আঁক।

২। একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান একটি সামান্তরিক আঁক যেন উহার একই ভূমি হয় এবং এক কোণ সমকোণের অর্ধেকের সমান হয়।

৩। একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের যে কোন শীর্ষ হইতে সরলরেখা টানিয়া উহাকে দ্বিখণ্ডিত কর।

৪। একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান একটি সামান্তরিক আঁক, যেন উহার এক কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

৫। একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান একটি সামান্তরিক আঁক, যেন উহার এক বাহু চতুর্ভুজের এক বাহুর সমান হয়।

৬। একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ আঁক।

৭। একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান একটি রম্বস আঁক যেন উহার এক বাহু সামান্তরিকের এক বাহুর সমান হয়। কখন ইহা সম্ভব হয় না?

৮। একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিককে এমন একটি সরলরেখা টানিয়া দ্বিখণ্ডিত কর, যাহা (১) একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে, (২) একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল অথবা লম্ব হইবে। (১৪৮ পৃঃ, উদা ৬ দেখ)।

৯। একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের কোনও শীর্ষ হইতে সরলরেখা টানিয়া উহাকে সাত সমান অংশে বিভক্ত কর।

১০। ABC ত্রিভুজের AC বাহুর মধ্যে D একটি নির্দিষ্ট বিন্দু; বর্ধিত ABএর মধ্যে এমন একটি E বিন্দু লও, যেন △DAE, ABC ত্রিভুজের সমান হয়।

১১। একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁক, যেন উহাদের একই ভূমি হয়।

১২। একটি চতুর্ভুজের সমান একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁক।

১৩। একটি নির্দিষ্ট ষড়ভুজের সমান একটি ত্রিভুজ আঁক।

১৪। ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান একটি ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে, যেন উহার ভূমি XY নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান এবং এক কোণ A কোণের সমান হয়।

[ABC ত্রিভুজের AB বা বর্ধিত AB বাহু হইতে AD = XY লও। DC সংযুক্ত কর এবং B হইতে DC এর সমান্তরাল BE সরলরেখা টান; ইহা যেন AC বা বর্ধিত ACকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। DE সংযুক্ত কর। তাহা হইলে ADE উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।]

১৫। একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি ত্রিভুজ আঁক যেন উহা একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং উহার এক কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

১৬। একটি নির্দিষ্ট ABCD সামান্তরিকের সমান একটি সামান্তরিক আঁকিতে হইবে যেন উহার ভূমি XY নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হয় এবং এক কোণ A কোণের সমান হয়।

[AB বা বর্ধিত AB হইতে AE = XY লও। DE সংযুক্ত কর। B হইতে DEএর সমান্তরাল BG সরলরেখা টান; ইহা যেন AD বা বর্ধিত AD কে G বিন্দুতে ছেদ করিল। AEFG সামান্তরিক অঙ্কিত করিলে উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হইবে।]

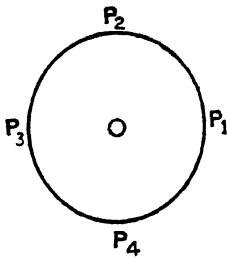
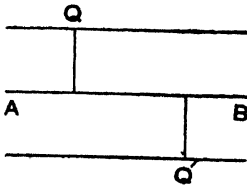
১৭। একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান একটি আয়তক্ষেত্র আঁকিতে হইবে যেন উহার ভূমি একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হয়।

১৮। একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের কোনও শীর্ষ হইতে সরলরেখা টানিয়া উহাকে দ্বিখণ্ডিত কর।

[চতুর্ভুজের সমান ত্রিভুজ আঁকিয়া উহার শীর্ষের সহিত ভূমির মধ্যবিন্দু সংযুক্ত কর।]

দ্বিতীয় অধ্যায়

সঞ্চারপথ

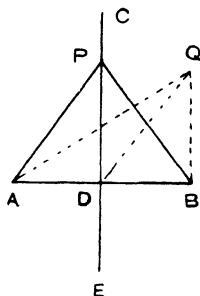
১। মনে কর O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং P একটি গতিশীল বিন্দু। P বিন্দুটি এরূপভাবে চলিতেছে যেন ইহা সর্বদাই O হইতে এক সেন্টিমিটর দূরে থাকে। ঐ নিয়মের বশবর্তী হইয়া P চলিলে, ইহার গতিতে যে রেখা উৎপন্ন হইবে তাহা এমন একটি বৃত্তের পরিধি যাহার কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ ১ সেঃ মিঃ। কারণ, বৃত্তের সংজ্ঞা হইতে তোমরা দেখিয়াছ যে, ঐ বৃত্তের পরিধিতে যে কোন বিন্দুই লওয়া যাউক না কেন, O হইতে উহার দূরত্ব ১ সেঃ মিঃ হইবে এবং ঐ বৃত্তের পরিধির বাহিরে এমন কোন বিন্দু নাই যাহার দূরত্ব O হইতে ১ সেঃ মিঃ হইতে পারে। এইজন্য ঐ বৃত্তের পরিধিকে P এর **সঞ্চারপথ** (Locus) বলা হয়।

২। আবার মনে কর Q একটি বিন্দু, উহা এরূপভাবে চলিতেছে যেন, উহা AB এই নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে, সর্বদাই ১ সেঃ মিঃ দূরে থাকে। Q এর ঐ নিয়মাধীন গতিতে যে রেখা উৎপন্ন হইবে তাহা AB হইতে ১ সেঃ মিঃ দূরে, AB এর সহিত সমান্তরাল করিয়া AB এর উভয় পার্শ্বে যে দুটি সরলরেখা টানা যায় তাহাই। কারণ, ঐ দুটি রেখার উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর দূরত্বই AB হইতে ১ সেঃ মিঃ এবং ঐ দুটি রেখার বাহিরে এমন কোন বিন্দু নাই যাহার দূরত্ব AB হইতে ১ সেঃ মিঃ হইতে পারে। এইজন্যই ঐ দুটি রেখাকে Q এর **সঞ্চারপথ** বলা হয়।

সংজ্ঞা। কোন নির্দিষ্ট নিয়মের বশবর্তী একটি বিন্দুর গতিতে যে পথ বা রেখা উৎপন্ন হয় ঐ রেখাকে উক্ত বিন্দুর **সঞ্চারপথ** বলে।

অতএব কোন রেখা একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ কি না প্রমাণ করিতে হইলে, দেখাইতে হইবে যে,

(১) ঐ রেখার অন্তর্গত প্রত্যেক বিন্দুই নির্দিষ্ট নিয়মের বশবর্তী ;

(২) ঐ রেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দুই নির্দিষ্ট নিয়মের বশবর্তী নহে।

উপপাদ্য ২৯

দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডক হইবে।

মনে কর, A ও B দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB সরলরেখার মধ্যবিন্দু D হইতে CDE, AB এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A ও B হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ CDE রেখা।

প্রমাণ। (১) CDE এর উপর **যে কোন** একটি বিন্দু P লও।
PA, PB সংযুক্ত কর।

এখন PDA, PDB ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

∵ { AD = BD, PD সাধারণ
এবং ∠PDA = ∠PDB, সমকোণ বলিয়া

অতএব, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ; ∴ PA = PB.

∴ CDE এর উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুই A ও B হইতে সমদূরবর্তী।

(২) ইহাও দেখান যাইতে পারে যে, CDE এর বাহিরে অবস্থিত কোন বিন্দুই A ও B হইতে সমদূরবর্তী নহে।

কারণ, যদি সম্ভব হয় তবে মনে কর যেন, CDE এর বাহিরে Q এমন একটি বিন্দু যাহা A ও B হইতে সমদূরবর্তী।

QA, QB ও QD সংযুক্ত কর।

এখন, QDA ও QDB ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

∵ { AD = BD, QD সাধারণ
এবং QA = QB, মনে করা হইয়াছে।

∴ QDA, QDB ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

∴ ∠QDA = ∠QDB, এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ;

অতএব, QD ABএর উপর লম্ব, কিন্তু তাহা হইতে পারে না।

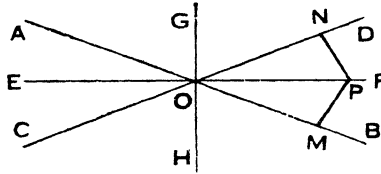
∴ CE এর বাহিরে কোন বিন্দুই A ও B হইতে সমদূরবর্তী হইতে পারে না।

অতএব, A ও B হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ CDE এই সীমাহীন সরলরেখা।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্ব-দ্বিখণ্ডক তিনটি এমন একই বিন্দুতে মিলিত হইবে যাহা ঐ ত্রিভুজের শীর্ষগুলি হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

(১৬৪ পৃষ্ঠায় উদাহরণ ৩ দেখ।)

উপপাদ্য ৩০

পরস্পর ছেদিত দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ ঐ রেখা দুটির অন্তর্ভূত কোণের দ্বিখণ্ডক সরলরেখাদ্বয় হইবে।

মনে কর, AB ও CD দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল। আরও মনে কর, EF সরলরেখা AOC ও BOD কোণদ্বয় দ্বিখণ্ডিত করিল এবং GH সরলরেখা AOD ও BOC কোণদ্বয় দ্বিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD রেখা দুটি হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ EF ও GH সরলরেখা দুটি।

প্রমাণ। (১) EFএর উপর **যে কোন** একটি বিন্দু P লও।

P হইতে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব টান।

এখন, POM, PON ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

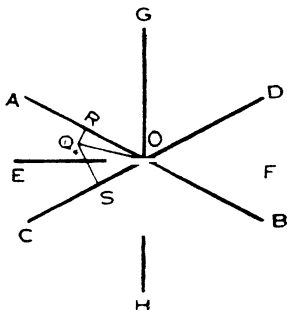
∵ $\angle POM = \angle PON$, দেওয়া আছে ;
$\angle PMO = \angle PNO$, সমকোণ বলিয়া ;
এবং OP সাধারণ।

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ; ∴ PM = PN

∴ EFএর উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুই AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী।

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, GHএর উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুই AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী।

(২) ইহাও দেখান যাইতে পারে যে, EF ও GH এর বাহিরে এমন কোনও বিন্দু নাই যাহা AB এবং CD হইতে সমদূরবর্তী।

কারণ, যদি সম্ভব হয় তবে মনে কর, যেন EF ও GH এর বাহিরে Q একটি বিন্দু যাহা AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী।

AB ও CD এর উপর যথাক্রমে QR ও QS লম্ব টান।

এখন QOR, QOS সমকোণী ত্রিভুজ দুটি সর্বসম; কারণ, ইহাদের QR = QS, মনে করা হইয়াছে; এবং অতিভুজ OQ সাধারণ (উপ ১৯)

∴ ∠QOR = ∠QOS; অর্থাৎ AOC কোণকে OQ দ্বিখণ্ডিত করিল, কিন্তু ইহা হইতে পারে না। (স্বতঃ)

∴ EF ও GH এর বাহিরে কোন বিন্দুই AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী হইতে পারে না।

∴ EF ও GH রেখা দুটিই AB ও CD হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ।

অনু। ত্রিভুজের তিন কোণের দ্বিখণ্ডক তিনটি এমন একই বিন্দুতে মিলিত হয়, যাহা উহার বাহুগুলি হইতে সমদূরবর্তী। (১৬৪ পৃষ্ঠা উদা ১ দেখ)

অনুশীলনী ১৬

১। কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট হইলে এবং উহার পরিধি কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া গেলে তাহার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ কি হইবে?

২। একটি ত্রিভুজের তিন বাহু হইতে সমদূরবর্তী কয়টি বিন্দু হইতে পারে?

৩। যে সকল সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একই নির্দিষ্ট ভূমি তাহাদের শীর্ষের সঞ্চারপথ ভূমির লম্ব-দ্বিখণ্ডক হইবে।

৪। যে সকল বৃত্ত দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়, তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ ঐ দুই বিন্দু সংযোজক সরলরেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডক হইবে।

৫। দুটি সমান্তরাল সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ উহাদের সমান্তরাল এমন একটি সরলরেখা যাহা উহাদের ঠিক মধ্যস্থলে অবস্থিত হইবে।

৬। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা পর্যন্ত যে সকল সরলরেখা টানা যায় তাহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ ঐ বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট রেখার উপর পাতিত লম্বের লম্ব-দ্বিখণ্ডক হইবে।

৭। কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে অভিভুজ করিয়া যে সকল সমকোণী ত্রিভুজ আঁকা যায় তাহাদের শীর্ষের সঞ্চারপথ ঐ রেখাকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত হইবে।

৮। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার অন্তর্গত এমন একটি বিন্দু নির্দেশ কর যাহা দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী।

৯। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার অন্তর্গত এমন একটি বিন্দু নির্দেশ কর, যাহা অন্য দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী।

১০। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট দূরে অবস্থিত অথচ দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্দেশ কর। এস্থলে কি কি পক্ষ উপস্থিত হইতে পারে এবং কখন ইহা অসম্ভব হয় দেখাও।

সংজ্ঞা

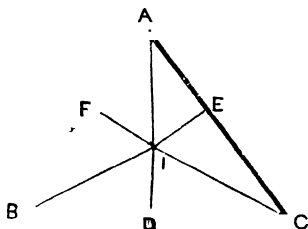
তিন বা ততোধিক সরলরেখা একই বিন্দুতে মিলিত হইলে উহারা **সমবিন্দু** (Concurrent) হইল বলা হয়।

ত্রিভুজের অন্তর্গত সরলরেখার সম্পাতবিন্দু

১। ত্রিভুজের কোণত্রয়ের দ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু হইবে।

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ, ইহার B ও C কোণের দ্বিখণ্ডক BI এবং CI রেখা দুটি যেন I বিন্দুতে ছেদ করিল ; AI সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AI, BAC কোণেব দ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন। I হইতে BC, CA ও AB এর উপব যথাক্রমে ID, IE ও IF লম্ব টান।

প্রমাণ। BI, ABC কোণের দ্বিখণ্ডক বলিযা, I বিন্দু AB ও BC হইতে সমদূরবর্তী, ∴ IF = ID (উপ ৩০)

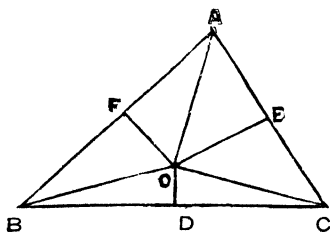
এইরূপ, ID = IE ∴ IF = IE

∴ AI, BAC কোণের দ্বিখণ্ডক ;

অতএব, ত্রিভুজের কোণত্রযের দ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু হইল।

২। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু হইতে উহাদের উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি সমবিন্দু হইবে।

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ, AC ও AB এব মধ্যবিন্দু E ও F হইতে যথাক্রমে OE এবং OF উহাদের উপব লম্ব। OE ও OF যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল।

মনে কর, D BCএর মধ্যবিন্দু ; OD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OD, BC এর উপব লম্ব।

AO, BO ও CO সংযুক্ত কর।

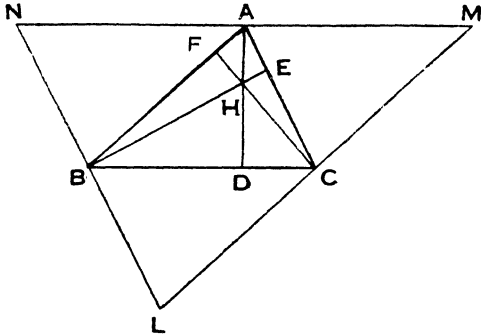
প্রমাণ। FO, AB এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক বলিয়া, OA = OB
আবার, EO, AC এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক বলিয়া, OA = OC (উপ ২৯)

$\therefore$ OB = OC

অতএব, OBD, OCD ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ;
কারণ, উহাদের মধ্যে OB = OC, BD = CD এবং OD সাধারণ।

$\therefore$ $\angle$ODB = $\angle$ODC = ১ সম $\angle$

অর্থাৎ OD, BC এর উপর লম্ব।

৩। ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্ব তিনটি সমবিন্দু হইবে।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং AD, BE, CF যথাক্রমে A, B, C হইতে উহাদের বিপরীত বাহুর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD, BE ও CF ইহারা সমবিন্দু হইবে।

অঙ্কন। A, B, ও C বিন্দু দিয়া উহাদের বিপরীত বাহুগুলির সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে MN, NL ও LM রেখা টান, উহারা যেন LMN ত্রিভুজ উৎপন্ন করিল।

প্রমাণ। এখন ANBC একটি সামান্তরিক

$\therefore$ AN = BC, সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলিয়া ;

সেইরূপ, AM = BC, অতএব AN = AM ;

$\therefore$ A, MN এর মধ্যবিন্দু,

এবং AD MNএর উপর লম্ব, কারণ MN ও BC সমান্তরাল এবং AD, BCএর উপর লম্ব।

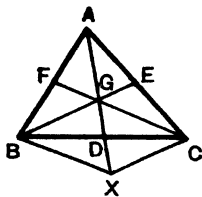
অতএব, AD LMN ত্রিভুজের MN বাহুর লম্ব-দ্বিখণ্ডক।

এই প্রকার, BE ও CF যথাক্রমে LMN ত্রিভুজের NL ও LM বাহুর লম্ব-দ্বিখণ্ডক।

অতএব, AD, BE ও CF ইহারা সমবিন্দু হইল। (উদা ২)

সংজ্ঞা। ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হইতে বিপরীত বাহু উপর পাতিত লম্ব-সমূহের সম্পাতবিন্দুকে ত্রিভুজের **লম্ববিন্দু** (Orthocentre) বলে।

৪। ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু হইবে।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ, ইহার BE ও CF মধ্যমা দুটি G বিন্দুতে ছেদ করিল, AG বর্ধিত করিলে উহা যেন BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AD, ABC ত্রিভুজের অবশিষ্ট মধ্যমাটি।

অঙ্কন। C বিন্দু দিয়া BE এর সমান্তরাল CX টান, CX যেন বর্ধিত ADকে X বিন্দুতে ছেদ করিল ; BX সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ACX ত্রিভুজে, E ACএর মধ্যবিন্দু এবং EG CXএর সমান্তরাল, $\therefore$ AG = GX (উপ ২৫, অনু ১)

আবার ABX ত্রিভুজে, F ও G যথাক্রমে AB ও AX এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ FG ও BX সমান্তরাল, অর্থাৎ FC ও BX সমান্তরাল,

অতএব GBXC একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ D BCএর মধ্যবিন্দু, কারণ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর দ্বিখণ্ডিত হয়। (উপ ২৪)

$\therefore$ AD ABC ত্রিভুজের একটি মধ্যমা।

অতএব, মধ্যমা তিনটি একই বিন্দুতে মিলিত হইল।

সংজ্ঞা। কোন ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমার সম্পাতবিন্দুকে ত্রিভুজের **ভরকেন্দ্র** (Centroid) বলে।

দ্রষ্টব্য। উল্লিখিত প্রতিজ্ঞায় প্রমাণিত হইয়াছে যে, AG = GX, এবং D GXএর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ AG = 2GD. $\therefore$ AD = 3GD. $\therefore$ GD = $\frac{1}{3}$AD.

সেইরূপ, GE = $\frac{1}{3}$BE এব GF = $\frac{1}{3}$CF.

৫। ত্রিভুজের এক কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং অপর দুই কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক দুটি সমবিন্দু হইবে।

[ইহার প্রমাণ উল্লিখিত প্রথম প্রতিজ্ঞার প্রমাণের অনুরূপ।]

বিবিধ অনুশীলনী ২

(তত্ত্বীয়)

১। ত্রিভুজের ভূমির সমান্তরাল করিয়া অন্য দুই বাহু পর্যন্ত অঙ্কিত যে কোন সরলরেখা ভূমির মধ্যবিন্দু সংযোজক মধ্যমার দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

২। BE ও CF যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের B ও C কোণের দ্বিখণ্ডক হইলে, যদি AE = AB এবং AF = AC হয় তবে দেখাও যে E, A, F একরেখীয় হইবে।

৩। প্রবৃদ্ধ কোণশূন্য চতুর্ভুজের বহিঃকোণ সমূহের দ্বিখণ্ডকগুলি এমন একটি চতুর্ভুজ উৎপন্ন করে, যাহার বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।

৪। কোনও চতুর্ভুজের চারিটি শীর্ষ দিয়া কর্ণদ্বয়ের সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা দ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্র সামান্তরিক হইবে এবং উহার ক্ষেত্রফল ঐ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হইবে।

৫। দুটি সমান এবং সমান্তরাল সরলরেখার বিপরীত প্রান্তবিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলে উৎপন্ন ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হইবে।

৬। দেখাও যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত করা যাইতে পারে।

৭। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা, সমান ক্ষেত্রফল এবং একই উন্নতিবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

৮। কোনও ত্রিভুজ একই বা সমান সমান ভূমিতে অবস্থিত অন্য দুই ত্রিভুজের সমষ্টি বা অন্তরের সমান হইবে যদি উহার উন্নতি শেষোক্ত দুই ত্রিভুজের উন্নতির সমষ্টি বা অন্তরের সমান হয়।

৯। সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক হইলে, প্রমাণ কর যে, উহাদের একের ভূমি অন্যের উন্নতির দ্বিগুণ হইবে।

১০। H, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$AH.\ BC + BH.\ CA + CH.\ AB = 4\ \triangle ABC.$$

১১। দুটি ত্রিভুজের ভূমি সমান এবং উহারা একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে, প্রমাণ কর যে, উহাদের বাহুগুলি ভূমির সমান্তরাল যে কোনও সরলরেখা হইতে সমান সমান অংশ ছেদন করিবে।

১২। ট্রাপিজিয়মের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া সমান্তরাল বাহুদুটির সমান্তরাল সরলরেখা ঐ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

১৩। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা, একই ভূমিতে অবস্থিত এবং সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট অন্য যে কোনও ত্রিভুজের পরিসীমা হইতে ক্ষুদ্রতর।

১৪। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্ব এবং মধ্যমার অন্তর্ভূত কোণ উহার সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের অন্তরের সমান।

১৫। ABC ত্রিভুজের B কোণের দ্বিখণ্ডক C কোণের দ্বিখণ্ডককে এবং A কোণের বহির্দ্বিখণ্ডককে যথাক্রমে I ও D বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, $\angle ADI = \angle ACI$.

১৬। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ A; এবং E ও F যথাক্রমে AC ও AB এর মধ্যবিন্দু; BE ও CF G বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, (১) $\triangle AEF = 3\ \triangle EFG$

এবং (২) $\triangle ABC = 12\ \triangle EFG$.

(সংখ্যামূলক)

১৭। কোন বর্গাকার উঠানের কর্ণ ৩০০ ফুট হইলে, তাহার ক্ষেত্রফল কত বর্গ গজ হইবে ?

১৮। কোন রম্বসের কর্ণদ্বয় ৮০ ফুট এবং ৬০ ফুট হইলে, তাহার ক্ষেত্রফল কত নির্ণয় কর।

১৯। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ১৩, ১২ ও ৫ একক এবং BC এর মধ্যবিন্দু D হইলে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল এবং AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২০। ABC ত্রিভুজের B ও C কোণের সমষ্টি A কোণের সমান। যদি AB, AC ও AD মধ্যমার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ১২, ৯ এবং ৭½ ফুট হয়, তবে △ABC এর ক্ষেত্রফল ও BC এর দৈর্ঘ্য কত নির্ণয় কর।

২১। একটি সমবাহু ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোনও বিন্দু হইতে বাহুত্রয়েব উপর পাতিত লম্বের পরিমাণ ৮, ১০ এবং ১২ ফুট। যদি ত্রিভুজের পরিসীমা ৬১ ফুট হয়, তবে উহার ক্ষেত্রফল কত ?

(সম্পাদ্য)

২২। একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার সন্নিহিত দুই বাহু যথাক্রমে প্রদত্ত দুটি সরলরেখার সমান হইবে। কখন ইহা সম্ভব হইবে না ?

২৩। একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যেন উহার সন্নিহিত দুই বাহু প্রদত্ত দুটি সরলরেখার সমান হয়। কখন ইহা সম্ভব হইবে না ?

২৪। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ও দুই বাহু নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

২৫। একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যেন উহার কর্ণদ্বয় দুই নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হয়।

২৬। একটি নির্দিষ্ট ABC ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন উহার ভূমি নির্দিষ্ট রেখা AD এর সমান হয় এবং AB এর সহিত একই সরলরেখায় অবস্থিত হয়।

২৭। একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং কোনও নির্দিষ্ট উন্নতি বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

২৮। নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যেন উহার শীর্ষ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর উপর এবং উহার ভূমি কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর পড়ে।

২৯। দুটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৩০। দুটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অন্তরের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৩১। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিককে দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

(লৈখিক)

৩২। ৩ ইঞ্চি দৈর্ঘ্য পরিমিত ভূমির উপর ২'৬ ইঞ্চি উন্নতি বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া ঐ ত্রিভুজের দ্বিগুণ ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যেন উহার এক কোণ ২৫° হয়।

৩৩। ৩ সেন্টিমিটর দীর্ঘ ভূমির উপর ২'৫ সেন্টিমিটর উন্নতি বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকিয়া উহার সমান ক্ষেত্রফল এবং ১'৫ সেন্টিমিটর উন্নতি বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

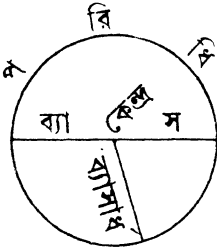
৩৪। একখানা ছক্‌কাগজে ইচ্ছামত এমন কতগুলি সামান্তরিক আঁক যেন উহাদের একই সাধারণ ভূমি এবং একই উন্নতি হয়। এখন গণনা করিয়া তাহাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে নিম্নলিখিত সূত্রটি সত্য কি না পরীক্ষা করিয়া দেখ।

'সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উন্নতি'।

তৃতীয় ভাগ

বৃত্ত

প্রথম পরিচ্ছেদ—সংজ্ঞা

তোমরা জান, যদি কোন সামতলিক ক্ষেত্র একটি বক্র রেখা দ্বারা এরূপে সীমাবদ্ধ হয় যে, ঐ ক্ষেত্রের অন্তঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সীমা পর্যন্ত যতগুলি সরলরেখা টানা যায়, তাহারা পরস্পর সমান, তবে ঐ ক্ষেত্রকে **বৃত্ত** বলে। বৃত্তের অন্তঃস্থ ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বৃত্তের **কেন্দ্র** এবং যে বক্ররেখা বৃত্তকে সীমাবদ্ধ করে তাহাকে বৃত্তের **পরিধি** বলে। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত যে কোন সরলরেখা টানা যায় তাহাকে বৃত্তের **ব্যাসার্ধ** বলে।

দ্রষ্টব্য। 'বৃত্ত' শব্দটি সময় সময় বৃত্তের পরিধি বুঝাইবার জন্য ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

সংজ্ঞা। যে সকল বৃত্তের একই কেন্দ্র তাহাদিগকে **এককেন্দ্রীয়** (Concentric) বৃত্ত বলে।

বৃত্তের সংজ্ঞা হইতে উহার নিম্নলিখিত **ধর্মাবলী** পাওয়া যায়ঃ—

(১) বৃত্ত একটি সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র।

(২) একটি বিন্দু কোন বৃত্তের পরিধির বাহিরে, উপরে কিংবা ভিতরে অবস্থিত হইবে, যদি বৃত্তের কেন্দ্র হইতে উহার দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের বড়, সমান কিংবা ছোট হয়।

(৩) বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন বিন্দুর দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের বড়, সমান কিংবা ছোট হইবে, যদি বিন্দুটি বৃত্তের পরিধির বাহিরে, উপরে কিংবা ভিতরে অবস্থিত হয়।

(৪) সমান সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তগুলি পরস্পর সমান।

কারণ, উহাদের একটির উপর অন্যটি উপরিপাত করিলে উহারা সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

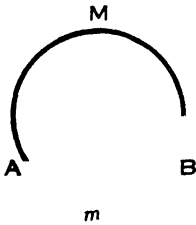
(৫) কোন ছুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ অসমান হইলে তাহারা পরস্পর ছেদ করিতে পারে না।

(৬) কোন ছুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি সাধারণ বিন্দু থাকিলে, বৃত্ত ছুটি সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যাইবে। কারণ, তাহাদের ব্যাসার্ধ সমান হইবে।

সংজ্ঞা। কোন বৃত্তের ব্যাস ও তদ্দ্বারা বিভক্ত পরিধির কোন অংশ দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে **অর্ধবৃত্ত** (Semi-circle) বলে।

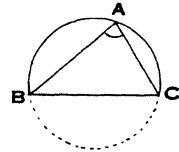
কারণ, যে কোন ব্যাসই একটি বৃত্তকে সমান ছুই অংশে বিভক্ত করে।

সংজ্ঞা। পরিধির কোনও অংশকে **চাপ** (Arc) বলে।

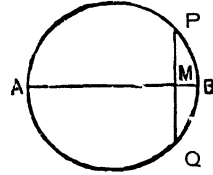
সংজ্ঞা। বৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন ছুই বিন্দু সংযোজক সরলরেখাকে **জ্যা** (Chord) বলে। যথা, নিম্নের চিত্রে AB একটি জ্যা।

বৃত্তের যে কোন জ্যা উহার পরিধিকে ছুটি চাপে বিভক্ত করে ; ঐ ছুটি চাপ সমান না হইলে, বড় চাপটিকে **অধিচাপ** (major arc) এবং ছোট চাপটিকে **উপচাপ** (minor arc) বলে। এবং উহাদের একটিকে অপরটির **অনুবন্ধী** বা **প্রতিযোগী** (Conjugate) বলে। যথা, পার্শ্বের চিত্রে AMB একটি অধিচাপ এবং AmB একটি উপচাপ। এবং AMB চাপ AmB চাপের অনুবন্ধী ; আবার, AmB চাপ AMB চাপের অনুবন্ধী।

স্পষ্টই দেখা যায় যে, একটি অধিচাপ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বড়, কিন্তু একটি উপচাপ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ছোট।

সংজ্ঞা। বৃত্তের কোনও জ্যা এবং তদ্দ্বারা বিভক্ত পরিধির অংশ ছুটির যে কোন একটি দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে **বৃত্তাংশ** (Segment) বলে। যথা, পার্শ্বের চিত্রে BCA একটি বৃত্তাংশ।

সংজ্ঞা। বৃত্তাংশের চাপের কোনও বিন্দুর সহিত উহার জ্যা এর প্রান্ত বিন্দুদ্বয় সংযোজক ছুই রেখার অন্তর্ভূত কোণকে **বৃত্তাংশস্থ কোণ** (Angle in a segment) বলে। যথা, পার্শ্বের চিত্রে $\angle$BAC একটি বৃত্তাংশস্থ কোণ।

প্রতিসাম্য

একটি চিত্রকে কোনও সরলরেখা ক্রমে ভাঁজ করিলে যদি ঐ রেখার উভয় পার্শ্বস্থ চিত্রাংশ পরস্পর সর্বতোভাবে মিলিয়া যায়, তবে উক্ত চিত্র ঐ রেখার সহিত **প্রতিসম** (Symmetrical) হইল বলা হয় এবং সরলরেখাটিকে ঐ চিত্রের **প্রতিসাম্য-অক্ষ** (Axis of Symmetry) বলা হয়।

মনে কর, APBQ চিত্রটি AB সরলরেখা ক্রমে ভাঁজ করিলে উহার AQB অংশ APB অংশের সহিত সর্বতোভাবে মিলিয়া গেল, এবং Q বিন্দু P বিন্দুর সহিত মিলিত হইল। অতএব PQ সরলরেখা যদি ABকে M বিন্দুতে ছেদ করে, তবে MQ রেখা MP রেখার সহিত মিলিত হইবে। সুতরাং PM = QM এবং ∠AMP = ∠AMQ হইবে। অর্থাৎ AB, PQকে লম্বভাবে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

আবার, বিপরীতক্রমে যদি AB, PMQএর লম্ব-দ্বিখণ্ডক হয় তবে AB রেখা ক্রমে ভাঁজ করিলে, MQ, MPএর উপর পড়িবে (কারণ, ∠AMQ = ∠AMP = ১ সম ∠) এবং Q বিন্দু P বিন্দুর সহিত মিলিত হইবে কারণ, MQ = MP. অতএব দেখা যায় যে,

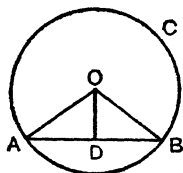
একটি চিত্রের অন্তর্গত কোন সরলরেখার উপর লম্বভাবে যে সকল লম্বরেখা উহার উভয় পার্শ্বস্থ চিত্রের সীমারেখা পর্যন্ত টানা যায়, যদি উহাদের প্রত্যেকেই ঐ সরলরেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয়, তবে উক্ত চিত্র ঐ সরলরেখার সহিত **প্রতিসম** হইবে। যথা, একটি বৃত্ত উহার যে কোনও ব্যাসের সহিত প্রতিসম হইয়া থাকে (উপ ৩১, অনু ৩ দেখ)।

সংজ্ঞা। চিত্রের প্রতিসাম্য-অক্ষ ক্রমে ভাঁজ করিলে চিত্রের উভয় পার্শ্বস্থ যে দুই বিন্দু পরস্পর মিলিত হয় তাহাদিগকে **বিপরীত অনুরূপ বিন্দু** বলে এবং তাহাদের একটিকে অপরটির **বিম্ব** (Image) বলে। যথা, উপরের চিত্রে P ও Q দুটি বিপরীত অনুরূপ বিন্দু ; ইহাদের মধ্যে P Qএর বিম্ব এবং Q Pএর বিম্ব।

কোন চিত্রের প্রতিসাম্য-অক্ষ চিত্রটিকে যে দুই অংশে বিভক্ত করে তাহাদের এক অংশকে অপর অংশের **বিম্ব** বলে। যথা, ১৭৩ পৃষ্ঠার চিত্রে AQB, APB এর বিম্ব এবং APB, AQB এর বিম্ব।

উপপাদ্য ৩১

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা, যাহা ব্যাস নহে এরূপ কোন জ্যাকে দ্বিখণ্ডিত করিলে, উক্ত সরলরেখা ঐ জ্যা এর উপর লম্ব হইবে।

বিপরীতক্রমে, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন জ্যাএর উপর পাতিত লম্ব, ঐ জ্যাকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

মনে কর, ABC একটি বৃত্ত, O উহার কেন্দ্র এবং AB এমন একটি জ্যা যাহা ব্যাস নহে। আরও মনে কর, যেন O হইতে OD একটি সরলরেখা, উহা ABকে D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OD, AB এর উপর লম্ব।

প্রমাণ। OA এবং OB সংযুক্ত কর।

এখন ADO, BDO ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

যেহেতু, { AD = BD, দেওয়া আছে,
OD সাধারণ ;
এবং OA = OB, একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া,

অতএব ADO ও BDO ত্রিভুজ দুটি সর্বতোভাবে সমান।

∴ ∠ADO = ∠BDO এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ,

∴ ADO ও BDO কোণের প্রত্যেকটিই এক সমকোণ ,

অতএব OD, ABএর উপর লম্ব ।

বিপরীতক্রমে, মনে কর ABC একটি বৃত্ত, O উহার কেন্দ্র এবং AB একটি জ্যা । আরও মনে কর O হইতে OD, AB এর লম্ব ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OD ABকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ। OA ও OB সংযুক্ত কর ।

এখন ADO ও BDO এই দুটি সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যে,

∵ { অতিভুজ OA = অতিভুজ OB, একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া,
এবং OD সাধারণ,

অতএব ADO ও BDO ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ;

∴ AD = BD

অর্থাৎ OD, ABকে দ্বিখণ্ডিত করিল ।

অনু ১। বৃত্তের কোন জ্যা এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক কেন্দ্র দিয়া যাইবে ।

অনু ২। কোন সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুই এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না ।

কারণ, যদি সম্ভব হয়, তবে মনে কর যেন কোন সরলরেখা বৃত্তকে A, B ও C এই তিন বিন্দুতে ছেদ করিল । তাহা হইলে, AB ও BC এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক দুটি কেন্দ্রে মিলিত হইবে, কিন্তু তাহা হইতে পারে না ; কারণ, উহারা একই সরলরেখার উপর লম্ব বলিয়া পরস্পর সমান্তরাল ।

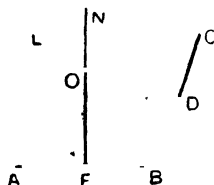
অনু ৩। একটি বৃত্ত উহার যে কোনও ব্যাসের সহিত প্রতিসম হইবে ।

কারণ, ঐ ব্যাসের উপর লম্ব প্রত্যেক জ্যাই ব্যাস দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে (১৭৩ পৃষ্ঠা দেখ)।

অনু ৪। দুটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় দিয়া অঙ্কিত সরলরেখা উহাদের প্রতিসাম্য-অক্ষ হইবে ।

কারণ, উহাদের প্রত্যেকেরই একটি ব্যাস কেন্দ্রদ্বয় দিয়া অঙ্কিত রেখার সহিত মিলিত হইয়া আছে ।

উপপাদ্য ৩২

একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে এরূপ তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কেবল একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে।

মনে কর A, B, C তিনটি বিন্দু এবং ইহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে A, B, C দিয়া কেবল একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

অঙ্কন। AB ও BC সংযুক্ত কর। মনে কর, FN ও DL যথাক্রমে AB এবং BC এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক ; FN ও DL যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। FN, ABএর লম্ব-দ্বিখণ্ডক বলিয়া, FNএর উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুই A ও B হইতে সমদূরবর্তী। (উপ ২৯)

এই প্রকার, DLএর উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুই B ও C হইতে সমদূরবর্তী।

অতএব, FN ও DL এর মধ্যে সাধারণ O বিন্দু A, B, C হইতে সমদূরবর্তী।

অতএব, Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে তাহা A, B ও C দিয়া যাইবে।

আবার যেহেতু, FN ও DL এর মধ্যে কেবল **একটি মাত্র** বিন্দু সাধারণ ; কারণ, AB ও BC পরস্পর ছেদ করিল বলিয়া FN ও DL পরস্পর ছেদ করিবেই এবং দুই সরলরেখা একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

অতএব, A, B, C দিয়া কেবল **একটি মাত্র** বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

অনু ১। দুটি বৃত্ত পরস্পর দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

কারণ, তাহা হইলে উহারা পরস্পর মিলিয়া একই বৃত্ত হইবে।

অনু ২। দুটি বৃত্তের কোন সাধারণ চাপ থাকিতে পারে না।

দ্রষ্টব্য ১। বৃত্তের উপর অবস্থিত যে কোন তিনটি বিন্দু জানিতে পারিলেই বৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে জানা যায়। কারণ, ঐরূপ তিন বিন্দু হইতে বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় করা যায়। এইজন্য তিন বিন্দু সূচক তিনটি অক্ষর দ্বারা একটি বৃত্তের নাম করা হয়। যেমন ABC একটি বৃত্ত।

দ্রষ্টব্য ২। এই প্রতিজ্ঞা হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, একই সরল রেখায় অবস্থিত নহে এরূপ তিনটি বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল, ইহা সর্বদাই কল্পনা করা যাইতে পারে।

অনুশীলনী ১৭

১। কোন সরলরেখা দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে ছেদ করিলে, পরিধিদ্বয়ের দ্বারা সীমাবদ্ধ উহার অংশ দুটি সমান হইবে।

২। যে সকল বৃত্ত দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডক হইবে।

৩। দুটি পরস্পর ছেদিত বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় ও উহাদের সাধারণ জ্যাএর মধ্যবিন্দু একরেখীয় (বা একই সরলরেখায় অবস্থিত) হইবে।

৪। বৃত্তের দুটি পরস্পর ছেদিত জ্যাএর উভয়েই ব্যাস না হইলে, ছেদবিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইতে পারে না।

৫। বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত দুইএর অধিক পরস্পর সমান সরলরেখা টানা গেলে, ঐ বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

৬। বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা উহার ব্যাস হইবে।

৭। বৃত্তের ব্যাস নহে এরূপ যে কোন দুটি জ্যাএর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা উহাদের একটির লম্ব হইলে অপরটিরও লম্ব হইবে।

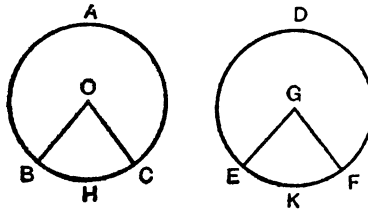
৮। বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যাএর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্র দিয়া যাইবে এবং উভয় জ্যাএর লম্ব হইবে।

৯। তুটি বৃত্তের কোন ছেদবিন্দু দিয়া উহাদের পরিধি পর্যন্ত যে সরলরেখা কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া টানা যায়, তাহা কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখার দ্বিগুণ।

১০। তুই বৃত্তের ছেদবিন্দু তুটি হইতে উহাদের পরিধি পর্যন্ত যে কোন তুই সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে উহারা সমান হইবে।

উপপাদ্য ৩৩

সমান সমান (অথবা একই) বৃত্তের, যে তুটি চাপ কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে, তাহারা পরস্পর সমান।

বিপরীতক্রমে, সমান সমান (অথবা একই) বৃত্তের তুই চাপ পরস্পর সমান হইলে, উহারা কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিবে।

মনে কর ABC, DEF তুটি পরস্পর সমান বৃত্ত এবং O ও G যথাক্রমে উহাদের কেন্দ্র। আরও মনে কর যেন, $\angle BOC = \angle EGF$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BHC চাপ = EKF চাপ।

প্রমাণ। ABC বৃত্তটি DEF বৃত্তের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন, O কেন্দ্র G কেন্দ্রের উপর পড়ে এবং OB GEএর উপর পড়ে।

তাহা হইলে OC, GFএর উপর পড়িবে ; কারণ, $\angle BOC = \angle EGF$

এবং B Eএর উপর ও C Fএর উপর পড়িবে ;

কারণ, সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধও পরস্পর সমান।

অতএব, বৃত্ত তুটি সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

অতএব, BHC চাপ EKF চাপের সহিত মিলিয়া যাইবে।

∴ BHC চাপ = EKF চাপ।

বিপরীতক্রমে, মনে কর ABC, DEF দুটি পরস্পর সমান বৃত্ত এবং O ও G যথাক্রমে উহাদের কেন্দ্র।

আরও মনে কর, BHC চাপ = EKF চাপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠BOC = ∠EGF.

প্রমাণ। ABC বৃত্তটি DEF বৃত্তের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন O কেন্দ্র G কেন্দ্রের উপর পড়ে এবং OB GEএর উপর পড়ে।

তাহা হইলে, B Eএর উপর পড়িবে; কারণ, সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধও সমান।

এবং বৃত্ত দুটি সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

কিন্তু দেওয়া আছে যে, BHC চাপ = EKF চাপ

∴ C, Fএর উপর পড়িবে, এবং OC GFএর উপর পড়িবে।

অতএব ∠BOC ∠EGF এর সহিত মিলিয়া যাইবে;

∴ ∠BOC = ∠EGF.

দ্রষ্টব্য। **একই বৃত্ত** সম্বন্ধে এই উপপাদ্য সপ্রমাণ করিতে হইলে, একই বৃত্তকে দুইটি পৃথক্ পৃথক্ বৃত্ত মনে করিয়া লইবে অথবা ঐ বৃত্তের একটি ঠিক প্রতিকৃতি আঁকিয়া মূল চিত্রের সহিত তাহা লইবে এবং উল্লিখিত প্রণালী অবলম্বন করিবে।

সংজ্ঞা। যে ক্ষেত্র দুইটি ব্যাসার্ধ এবং তাহাদের অন্তর্গত পরিধিখণ্ড দ্বারা সীমাবদ্ধ হয় তাহাকে **বৃত্তকলা** (Sector) বলে; যথা, উপপাদ্য ৩৩ এর চিত্রে BOCH একটি বৃত্তকলা।

সংজ্ঞা। একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমস্ত শীর্ষ কোনও বৃত্তের পরিধিতে অবস্থিত হইলে, উক্ত ঋজুরেখ ক্ষেত্র ঐ বৃত্তে **অন্তর্লিখিত** (inscribed) হইল বলা হয়।

উপপাদ্য ৩৪

সমান সমান (অথবা একই) বৃত্তের পরস্পর সমান জ্যা সমান সমান চাপ উৎপন্ন করে, ইহাতে অধিচাপ অধিচাপের এবং উপচাপ উপচাপের সমান হইয়া থাকে।

বিপরীতক্রমে, সমান সমান (অথবা একই) বৃত্তের যে সকল জ্যা সমান সমান চাপ উৎপন্ন করে তাহারা পরস্পর সমান।

মনে কর ABC, DEF দুটি পরস্পর সমান বৃত্ত এবং O ও G যথাক্রমে উহাদের কেন্দ্র। আরও মনে কর, জ্যা BC = জ্যা EF

প্রমাণ করিতে হইবে যে, অধিচাপ BAC = অধিচাপ EDF,
এবং উপচাপ BHC = উপচাপ EKF.

প্রমাণ। OB, OC, GE, GF সংযুক্ত কর।

এখন OBC, GEF, ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

যেহেতু, { OB = GE, সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া,
OC = GF, " " " " "
এবং BC = EF, দেওয়া আছে।

অতএব, OBC, GEF ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। (উপ ১৮)

∴ ∠BOC = ∠EGF

∴ BHC চাপ = EKF চাপ (উপ ৩৩)

এবং ইহারা উভয় বৃত্তের উপচাপ।

কিন্তু সমস্ত পরিধি ABHC = সমস্ত পরিধি DEKF.

∴ অবশিষ্ট BAC চাপ = অবশিষ্ট EDF চাপ, এবং ইহারা উভয় বৃত্তের অধিচাপ।

বিপরীতক্রমে, মনে কর ABC, DEF দুটি পরস্পর সমান বৃত্ত এবং O ও G যথাক্রমে উহাদের কেন্দ্র। আরও মনে কর BHC চাপ = EKF চাপ

প্রমাণ করিতে হইবে যে, জ্যা BC = জ্যা EF

প্রথম প্রকার

প্রমাণ। OB, OC, GE, GF সংযুক্ত কর।

এখন OBC, GEF ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

যেহেতু, { OB = GE, সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া ;
OC = GF, ” ” ”
এবং ∠BOC = ∠EGF, কারণ BHC চাপ = EKF চাপ

অতএব, OBC, GEF ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ;

∴ জ্যা BC = জ্যা EF

দ্বিতীয় প্রকার

প্রমাণ। OB, GE সংযুক্ত কর।

এখন, ABC বৃত্তটি DEF বৃত্তের উপর এইরূপে রাখ যেন, O কেন্দ্র G কেন্দ্র এর উপর পড়ে এবং OB GEএর উপর পড়ে।

তাহা হইলে, B Eএর উপর পড়িবে ;

কারণ, বৃত্ত দুটি সমান বলিয়া তাহাদের ব্যাসার্ধও সমান ;

এবং বৃত্ত দুটি সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

অতএব, C Fএর উপর পড়িবে ; কারণ, BHC চাপ = EKF চাপ।
তাহা হইলে জ্যা BC জ্যা EF এর সহিত মিলিয়া যাইবে।

∴ জ্যা BC = জ্যা EF.

অনু। সমান সমান (অথবা একই) বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে।

দ্রষ্টব্য। **একই বৃত্ত** সম্বন্ধে এই উপপাদ্য সপ্রমাণ করিতে হইলে, একই বৃত্তকে দুইটি পৃথক্ পৃথক্ বৃত্ত মনে করিয়া লইবে অথবা ঐ বৃত্তের একটি ঠিক প্রতিকৃতি আঁকিয়া মূল চিত্রের সহিত তাহা লইবে এবং উল্লিখিত প্রণালী অবলম্বন করিবে।

অনুশীলনী ১৮

১। বৃত্তের প্রত্যেক ব্যাস পরিধিকে দুই সমান অংশে বিভক্ত করে।

২। কোন বৃত্তে একটি সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত হইলে, প্রমাণ কর যে, উহার

(১) শীর্ষগুলি পরিধিকে তিন সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

(২) প্রত্যেক বাহু কেন্দ্রে যে সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে তাহা সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের দ্বিগুণ হইবে।

৩। দুটি পরস্পর ছেদিত বৃত্তের সাধারণ জ্যা উহাদের কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিলে, বৃত্ত দুটি সমান হইবে।

৪। দুই বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিলে, বৃত্ত দুটি সমান হইবে।

৫। বৃত্তে একটি বর্গক্ষেত্র অন্তর্লিখিত হইলে, প্রমাণ কর যে উহার

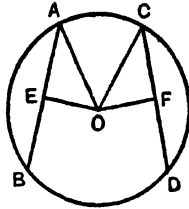
(১) শীর্ষগুলি পরিধিকে চারি সমান অংশে বিভক্ত করিবে

(২) প্রত্যেক বাহু কেন্দ্রে এক সমকোণের সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিবে।

৬। বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোন সুষম ষড়ভুজের প্রত্যেক শীর্ষ কেন্দ্রের সহিত সংযুক্ত করিলে, ষড়ভুজটি ছয়টি পরস্পর সমান সমবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে এবং বৃত্তটি ছয়টি সমান বৃত্তকলায় বিভক্ত হইবে।

উপপাদ্য ৩৫

বৃত্তের সমান সমান জ্যা উহার কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

বিপরীতক্রমে, কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যা সকল পরস্পর সমান।

মনে কর AB ও CD কোনও বৃত্তের দুটি জ্যা, O ঐ বৃত্তের কেন্দ্র এবং O হইতে OE, OF যথাক্রমে AB ও CD এর উপর লম্ব।

আরও মনে কর, AB = CD

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OE = OF.

প্রমাণ। OA, OC সংযুক্ত কর।

এখন, কেন্দ্র হইতে OE AB এর উপর লম্ব বলিয়া,

AE = EB. (উপ ৩১)

∴ AE = AB এর অর্ধেক।

সেইপ্রকার, CF = CD এর অর্ধেক।

কিন্তু দেওয়া আছে যে, AB = CD ; ∴ AE = CF

এখন OEA, OFC দুটি সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যে

যেহেতু, { ∠OEA = ∠OFC, সমকোণ বলিয়া ; অতিভুজ OA = অতিভুজ OC এবং AE = CF, প্রমাণিত }

অতএব, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ; ∴ OE = OF.

বিপরীতক্রমে, মনে কর AB ও CD কোনও বৃত্তের দুটি জ্যা, O ঐ বৃত্তের কেন্দ্র এবং O হইতে OE, OF যথাক্রমে AB ও CD এর উপর লম্ব। আরও মনে কর, OE = OF

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB = CD.

প্রমাণ। OA, OC সংযুক্ত কর।

এখন, OEA, OFC সমকোণী ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

যেহেতু,
- ∠OEA = ∠OFC, সমকোণ বলিয়া ;
- অতিভুজ OA = অতিভুজ OC,
- এবং OE = OF, দেওয়া আছে

অতএব, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ; ∴ AE = CF

কিন্তু কেন্দ্র হইতে OE ABএর উপর লম্ব বলিয়া,

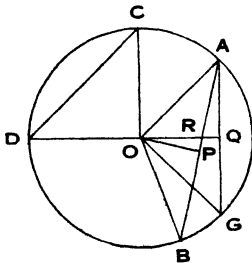
AB = AE এর দ্বিগুণ, (উপ ৩১)

সেইরূপ, CD = CF এর দ্বিগুণ ; ∴ AB = CD.

অনুশীলনী ১৯

১। বৃত্তের দুটি জ্যা অসমান হইলে, বৃহত্তর জ্যা ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা (১) কেন্দ্রে বৃহত্তর সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিবে এবং (২) কেন্দ্রের অধিক নিকটবর্তী হইবে।

মনে কর, O-কেন্দ্র বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যাএর মধ্যে AB > CD.

OA, OB, OC, OD সংযুক্ত কর।

(১) এখন AOB, COD ত্রিভুজ দুটির মধ্যে OA, OB বাহু দুটি OC, OD বাহু দুটির সমান ;

কিন্তু AB ভূমি > CD ভূমি

∴ ∠AOB > ∠COD.

(১৩১ পৃঃ, উদা ৩)

(২) COD ত্রিভুজটিকে AOB ত্রিভুজের উপর এরূপভাবে রাখ যেন C বিন্দু A বিন্দুর উপর পড়ে, CO, AO এর সহিত মিলিয়া থাকে এবং কেন্দ্রের যে পার্শ্বে B আছে সেই পার্শ্বে পরিধির উপর D পড়ে।

তাহা হইলে, OD AOBকোণের ভিতরে পড়িবে ;

কারণ, $\angle AOB > \angle COD$

মনে কর AOG, COD ত্রিভুজের নূতন অবস্থান হইল।

$\therefore \quad AG = CD.$

OP, OQ যথাক্রমে AB ও AG এর উপর লম্ব টান, OQ যেন ABকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন $OP < OR$ (উপ ২৩)

$\therefore \quad OP < OQ$ এবং OQ Oহইতে CD এর দূরত্বের সমান।

বিপরীতক্রমে। (১) $\angle AOB > \angle COD$ হইলে, AB জ্যা CD জ্যা অপেক্ষা বড় হইবে এবং (২) $OP < OQ$ হইলে $AB > AG$ বা $> CD$ হইবে।

২। বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা উহার ব্যাস হইবে।

৩। বৃত্তের সমান সমান জ্যাএর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত হইবে।

৪। AB ও AC কোন বৃত্তের দুটি সমান জ্যা হইলে, প্রমাণ কর যে, BAC কোণের দ্বিখণ্ডক বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

৫। বৃত্তের দুটি জ্যা (বৃত্তের ভিতর বা বাহিরে) কোন বিন্দুতে ছেদ করিলে, যদি ঐ বিন্দু ও কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখার সহিত জ্যা দুটি পরস্পর সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে উহারা সমান হইবে।

৬। বৃত্তের সমান সমান দুটি জ্যা (বৃত্তের ভিতরে কিংবা বাহিরে) কোন বিন্দুতে ছেদ করিলে উহাদের একের দুইখণ্ড যথাক্রমে অন্যের দুই খণ্ডের সমান হইবে।

৭। বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যতগুলি জ্যা টানা যায়, তাহাদের মধ্যে ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের লম্ব জ্যাটি ক্ষুদ্রতম।

৮। দুটি বৃত্তের কোন ছেদবিন্দু দিয়া উহাদের পরিধি পর্যন্ত যে সকল সরলরেখা টানা যায় তাহাদের মধ্যে কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখার সমান্তরাল রেখাটি বৃহত্তম।

৯। বৃত্তের কোন জ্যা কেন্দ্রে কোন নির্দিষ্ট সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিলে, উহার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত হইবে।

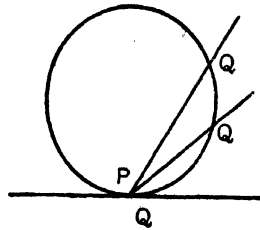
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

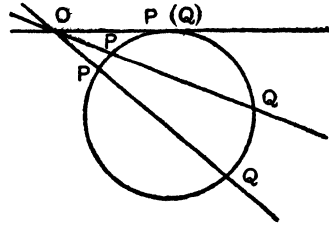
বৃত্তের স্পর্শক

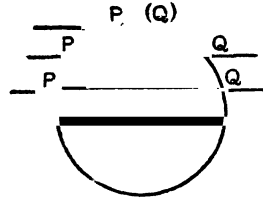
যে সীমাহীন সরলরেখা বৃত্তকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে ঐ বৃত্তের **ছেদক** (Secant) বলে।

বৃত্তের কোনও ছেদক ক্রমে ক্রমে সরিয়া সরিয়া যদি এমন এক পরিণাম অবস্থানে আসিয়া দাঁড়ায় যে, ঐ অবস্থানে বৃত্তের সহিত উহার ছেদবিন্দু দুটি পরস্পর মিলিত হইয়া যায়, তাহা হইলে ঐ পরিণাম অবস্থানে ছেদকটিকে **স্পর্শক** (Tangent) বলা হয়।

এ স্থলে যে বিন্দুতে ছেদবিন্দু দুটি মিলিত হয় সেই বিন্দুতে ছেদকটি বৃত্তকে **স্পর্শ** (touch) করিয়াছে বলা হয় এবং ঐ বিন্দুকে **স্পর্শবিন্দু** (Point of contact) বলা হয়। যথা,

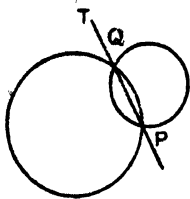
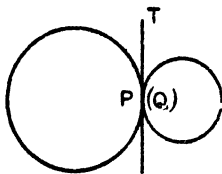
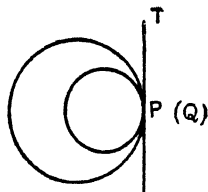
(১) মনে কর PQ একটি ছেদক, উহা যেন বৃত্তটিকে P ও Q বিন্দুতে

ছেদ করিল। এখন P বিন্দুকে স্থির রাখিয়া PQ ছেদককে P বিন্দুর চতুর্দিকে ঘুরাইলে Q ক্রমশঃ P এর সন্নিহিত হইতে থাকিবে এবং পরিণামে Q P এর সহিত মিলিত হইবে। ঐ পরিণাম অবস্থানে PQ P বিন্দুতে ঐ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

(২) আবার মনে কর, PQ একটি ছেদক ইহা যেন বৃত্তটিকে P, Q এই দুই বিন্দুতে ছেদ করিল। আরও মনে কর, O ইহার অন্তর্গত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। OPQ ছেদককে O বিন্দুর চতুর্দিকে ঘুরাইলে P ও Q বিন্দু দুটি ক্রমান্বয়ে পরস্পরের সন্নিহিত হইতে থাকিবে এবং পরিণামে তাহারা মিলিত হইবে। এই পরিণাম অবস্থানে O হইতে OPQ ঐ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

(৩) আবার মনে কর, PQ একটি ছেদক, ইহা যেন বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

PQকে ক্রমান্বয়ে উহার সহিত সমান্তরাল রাখিয়া সরাইয়া লও। তাহা হইলে P ও Q ক্রমশঃ পরস্পরের সন্নিহিত হইতে থাকিবে এবং পরিণামে উহারা মিলিত হইবে। এই পরিণাম অবস্থানে PQ ঐ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

সংজ্ঞা। যে সরলরেখা বৃত্তের সহিত মাত্র এক বিন্দুতে মিলিত হয় এবং উভয় দিকে বর্ধিত হইলে বৃত্তকে ছেদ করে না তাহাকে ঐ বৃত্তের **স্পর্শক** বলে।

সংজ্ঞা। দুইটি বৃত্ত পরস্পর **একটি মাত্র** বিন্দুতে মিলিত হইলে উহারা পরস্পর **স্পর্শ** করিয়াছে বলা হয়।

পরস্পর স্পর্শ করে এরূপ দুই বৃত্তকে, যে দুই বৃত্তের ছেদবিন্দু **একই** বিন্দুতে মিলিত হয় ঐরূপ দুটি পরস্পর ছেদিত বৃত্ত মনে করা যায়।

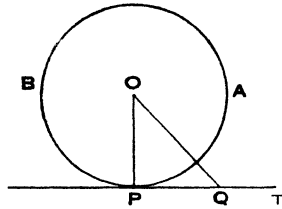
কারণ, মনে কর দুটি বৃত্ত পরস্পর P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিল (প্রথম চিত্র)।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র) (৩য় চিত্র)

এখন, P বিন্দুকে স্থির রাখিয়া একটি বৃত্তকে P বিন্দুর চতুর্দিকে ঘুরাইলে Q ক্রমশঃ P এর সন্নিহিত হইতে থাকিবে এবং পরিণামে Q P এর সহিত মিলিত হইবে। ঐ পরিণাম অবস্থানে যখন P ও Q মিলিত হয় (দ্বিতীয় ও তৃতীয় চিত্র) তখন বৃত্ত দুটি পরস্পর P বিন্দুতে **স্পর্শ** করিয়াছে বলা হয় ; এবং Pকে (দ্বিতীয় ও তৃতীয় চিত্রে) **স্পর্শবিন্দু** বলা হয়।

দ্বিতীয় চিত্রে বৃত্ত দুটির একটি অপরটির বাহিরে অবস্থিত বলিয়া ঐস্থলে বৃত্ত দুটি **বহিঃস্পর্শ** (external contact) করিয়াছে বলা হয় এবং তৃতীয় চিত্রে বৃত্ত দুটির একটি অপরটির ভিতরে অবস্থিত বলিয়া ঐস্থলে উহারা **অন্তঃস্পর্শ** (internal contact) করিয়াছে বলা হয়।

মন্তব্য। যে দুটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করে তাহাদের একটি সাধারণ জ্যা আছে, উহা ছেদবিন্দু দুটিকে সংযুক্ত করে। অতএব যখন ছেদ-বিন্দু দুটি পরস্পর মিলিত হয় তখন ঐ সাধারণ জ্যা অথবা উভয়দিকে বর্ধিত সাধারণ জ্যা উভয় বৃত্তকেই দুটি পরস্পর মিলিত বিন্দুতে ছেদ করে, অর্থাৎ উহা ঐ মিলিত বিন্দুতে উভয় বৃত্তের **সাধারণ স্পর্শক** (common tangent) হয়। অতএব দুটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে, স্পর্শ বিন্দুতে তাহাদের একটি সাধারণ স্পর্শক হইয়া থাকে। যথা, দ্বিতীয় ও তৃতীয় চিত্রে PT ঐ উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক।

উপপাদ্য ৩৬

বৃত্তের কোনও বিন্দুতে স্পর্শক, ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব হইবে।

মনে কর, PAB বৃত্তের P বিন্দুতে PT উহার স্পর্শক ; O বৃত্তের কেন্দ্র এবং OP, P বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PT OPএর উপর লম্ব।

প্রমাণ। PT এর উপর যে কোনও বিন্দু Q লও ; OQ সংযুক্ত কর।

এখন, PT স্পর্শক বলিয়া, উহার স্পর্শবিন্দু P ব্যতীত অপর প্রত্যেক বিন্দুই বৃত্তের বাহিরে পড়িবে।

∴ OQ OP অপেক্ষা বড় হইবে এবং ইহা PT এর উপর Qএর যে কোনও অবস্থানের জন্যই খাটিবে।

অতএব, OP O হইতে PT পর্যন্ত ক্ষুদ্রতম সরলরেখা ;

∴ OP, PT এর লম্ব। (উপ ২৩, অনু ৪)

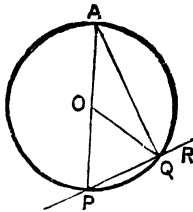
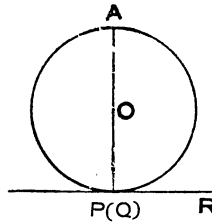
অনু ১। বিপরীতক্রমে, বৃত্তের যে কোনও বিন্দু হইতে ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব, ঐ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

মন্তব্য। এই অনুসিদ্ধান্ত হইতে বৃত্তের কোনও নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কিত করিবার নিয়ম পাওয়া যায়।

অনু ২। বৃত্তের কোনও নির্দিষ্ট বিন্দুতে উহার কেবল একটি মাত্র স্পর্শক হইতে পারে।

কারণ, যদি O বৃত্তের কেন্দ্র এবং P বৃত্তের উপর নির্দিষ্ট বিন্দু হয় তবে OP ব্যাসার্ধের উপর P বিন্দু দিয়া কেবল একটি মাত্র লম্ব টানা যায়।

অনু ৩। স্পর্শবিন্দু দিয়া বৃত্তের কোন স্পর্শকের উপর লম্ব কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

উপপাদ্য ৩৬এর বিকল্প প্রমাণ

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র)

মনে কর, P একটি বৃত্তের কোন এক বিন্দু এবং O উহার কেন্দ্র।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, P বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক OPএর লম্ব।

অঙ্কন। P বিন্দু দিয়া PR একটি ছেদক টান, উহা যেন বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

মনে কর, P বিন্দু দিয়া PA বৃত্তের ব্যাস। OQ, AQ সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। এখন একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া, $OP = OQ$

$\therefore \quad \angle OQP = \angle OPQ = \angle APQ$ (উপ ১৬)

এই প্রকার, $\angle OQA = \angle OAQ = \angle PAQ$

অতএব, সমস্ত $\angle PQA = \angle QPA + \angle PAQ$

কিন্তু APQ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

$\therefore \quad \angle PQA =$ এক সমকোণ।

অর্থাৎ ছেদক PR, AQএর উপর লম্ব ; এবং ইহা Q এর যে কোনও অবস্থানের জন্যই সত্য হইবে।

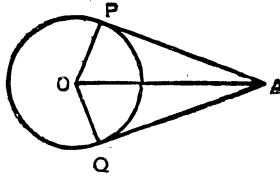
এখন যদি Q ক্রমশঃ P এর সন্নিহিত হয় এবং পরিণামে Pএর সহিত মিলিত হয় তবে ঐ পরিণাম অবস্থানে PR, Pবিন্দুতে স্পর্শক হইবে এবং AQ Pবিন্দু দিয়া বৃত্তের ব্যাস হইবে। (২য় চিত্র দেখ)

কিন্তু Q এর **সকল** অবস্থানেই PR AQ এর উপর লম্ব।

অতএব, ঐ পরিণাম অবস্থানে P বিন্দুতে স্পর্শকPR APএর উপর লম্ব। $\therefore$ PR OPএর উপর লম্ব।

অর্থাৎ, P বিন্দুতে স্পর্শক OP এর উপর লম্ব।

উপপাদ্য ৩৭

বৃত্তের বহিঃস্থ কোনও বিন্দু হইতে বৃত্তের দুটি স্পর্শক টানিলে, উহারা পরস্পর সমান হইবে এবং বৃত্তের কেন্দ্রে **সমান সমান সম্মুখকোণ** উৎপন্ন করিবে।

মনে কর, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং A উহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু ; A হইতে AP ও AQ বৃত্তের দুটি স্পর্শক, এবং P ও Q যথাক্রমে উহাদের স্পর্শবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, (১) $AP = AQ$,

(২) $\angle AOP = \angle AOQ$

প্রমাণ। AP বৃত্তের স্পর্শক এবং OP স্পর্শবিন্দু সংযোজক ব্যাসার্ধ বলিয়া, $\angle APO =$ এক সমকোণ।

সেইরূপ $\angle AQO =$ এক সমকোণ।

এখন APO, AQO দুটি সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যে,

$\because$ { $PO = QO$, একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া ;
এবং অতিভুজ OA সাধারণ।

অতএব APO, AQO ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ; (উপ ১৯)

$\therefore$ $AP = AQ$ ... (১)

এবং $\angle AOP = \angle AOQ$ ... (২)

দ্রষ্টব্য। দেখিতে পাওয়া যাইবে যে, বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তের দুটি মাত্র স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়। (সম্পাদ্য ১৬ দেখ)

অনুশীলনী ২০

১। বৃত্তের কোনও ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি সমান্তরাল।

২। বৃত্তের কোন দুটি স্পর্শক সমান্তরাল হইলে তাহাদের স্পর্শ-বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা বৃত্তের ব্যাস হইবে।

৩। বৃত্তের ব্যাস উহার যে কোনও প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শকের সমান্তরাল সকল জ্যাকেই দ্বিখণ্ডিত করিবে।

৪। দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বাহিরেরটির কোনও জ্যা ভিতরেরটিকে স্পর্শ করিলে, স্পর্শবিন্দুতে ঐ জ্যা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৫। দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বাহিরেরটির যে সকল জ্যা ভিতরেরটিকে স্পর্শ করে, তাহারা পরস্পর সমান।

৬। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে উহার কোনও স্পর্শকের দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান।

৭। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোনও সরলরেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হইলে ঐ রেখা বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

৮। বৃত্তের কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট জ্যা সমূহ কোন এক-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

৯। বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উহার দুটি স্পর্শকের অন্তর্ভূত কোণ, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের সম্পূরক হইবে।

১০। বৃত্তের বহিঃস্থ কোন T বিন্দু হইতে PT, QT যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক এবং O বৃত্তের কেন্দ্র হইলে, প্রমাণ কর যে,

(১) $\angle PTO = \angle QTO$,

(২) OT PQকে লম্বভাবে দ্বিখণ্ডিত করিবে,

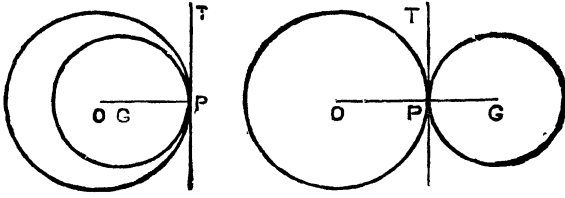
(৩) $\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}\angle POQ$,

(৪) $\angle OPQ = \angle OQP = \frac{1}{2}\angle PTQ$.

১১। বৃত্তের পরিধিকে তিন সমান অংশে বিভক্ত করিয়া ছেদবিন্দু তিনটি হইতে অঙ্কিত স্পর্শকগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করিবে।

১২। যে বৃত্ত দুটি পরস্পর ছেদিত সরলরেখার প্রত্যেককে স্পর্শ করে তাহার কেন্দ্র ঐ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের দ্বিখণ্ডকের উপর থাকিবে।

উপপাদ্য ৩৮

দুইটি বৃত্ত স্পর্শ করিলে স্পর্শবিন্দু উহাদের কেন্দ্রদ্বয় দিয়া অঙ্কিত সরলরেখার উপর পড়িবে।

মনে কর, O এবং G কেন্দ্র বিশিষ্ট দুটি বৃত্ত P বিন্দুতে স্পর্শ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, P OG অথবা বর্ধিত OGএর উপর পড়িবে; অর্থাৎ O, P, G একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

মনে কর P বিন্দুতে PT সাধারণ স্পর্শক। OP, GP সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। P বিন্দুতে PT সাধারণ স্পর্শক এবং OP, GF ঐ স্পর্শবিন্দু সংযোজক ব্যাসার্ধ বলিয়া; OPT, GPT কোণের প্রত্যেকেই এক সমকোণ।

এখন প্রথম চিত্রে, $\angle$OPT = $\angle$GPT ; সমকোণ বলিয়া,

∴ PG POএর সহিত মিলিত হইবে;

অতএব O, P, G একই সরলরেখাস্থ।

আবার দ্বিতীয় চিত্রে, OPT, GFT সন্নিহিত কোণ দুটি একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান;

∴ OP ও GP একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

∴ O, P, G একই সরলরেখাস্থ।

অনু। দুটি বৃত্ত বহিঃস্পর্শ করিলে উহাদের কেন্দ্রের দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে এবং অন্তঃস্পর্শ করিলে উহাদের কেন্দ্রের দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তরের সমান হইবে।

বিপরীতক্রমে, দুটি বৃত্তের কেন্দ্রের দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইলে উহারা বহিঃস্পর্শ করিবে এবং ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তরের সমান হইলে উহারা অন্তঃস্পর্শ করিবে।

অনুশীলনী ২১

(উপপাদ্য ৩৭, ৩৮)

১। দুটি বৃত্তের স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত সরলরেখা উহাদিগকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল ; যদি O ও C যথাক্রমে ঐ বৃত্ত দুটির কেন্দ্র হয়, তবে প্রমাণ কর যে, (১) OP ও CQ ব্যাসার্ধদ্বয় সমান্তরাল হইবে এবং (২) P ও Q বিন্দুতে স্পর্শক দুটিও সমান্তরাল হইবে।

২। দুটি বৃত্ত A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিলে এবং কোনও PQ সরলরেখা উহাদিগকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করিলে, প্রমাণ কর যে,

$\angle PAQ =$ এক সমকোণ।

৩। যে সকল বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪। একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে। ঐরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পার ?

৫। যে বৃত্ত দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে স্পর্শ করে, তাহার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

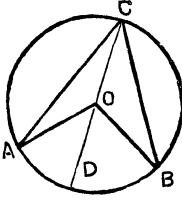
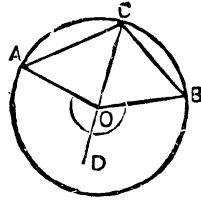
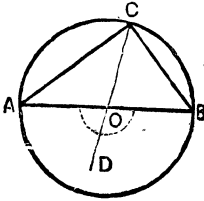
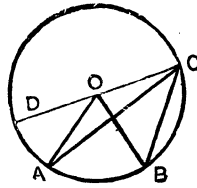
৬। যে সকল বৃত্ত দুটি পরস্পর ছেদিত সরলরেখার প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ ঐ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক হইবে।

৭। বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উহার স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট হইলে, ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত হইবে।

৮। বৃত্তের যে কোন দুটি সমান্তরাল স্পর্শক অন্য একটি স্পর্শক হইতে উহার যে অংশ ছেদন করে তাহা কেন্দ্রে এক সমকোণের সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিবে।

৯। একটি চতুর্ভুজ কোন বৃত্তে পরিলিখিত হইলে, প্রমাণ কর যে, (১) উহার এক জোড়া বিপরীত বাহুর সমষ্টি অন্য জোড়া বিপরীত বাহুর সমষ্টির সমান এবং (২) উহার কোন দুই বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুটি সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে তাহারা পরস্পর সম্পূরক।

উপপাদ্য ৩৯

বৃত্তের কোন চাপ কেন্দ্রে যে সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে তাহা, ঐ চাপ দ্বারা উৎপন্ন পরিধিস্থ সম্মুখকোণের দ্বিগুণ।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র) (৩য় চিত্র) (৪র্থ চিত্র)

মনে কর, AB বৃত্তের একটি চাপ ; O বৃত্তের কেন্দ্র। আরও মনে কর, AB চাপ কেন্দ্রে AOB কোণ এবং অবশিষ্ট পরিধির কোন এক বিন্দু Cতে ACB কোণ উৎপন্ন করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AOB কোণ ACB কোণের দ্বিগুণ।

প্রমাণ। CO সংযুক্ত কর এবং ইহাকে যে কোন D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর।

এখন যেহেতু $OC = OA$; একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া,

$\therefore \quad \angle OAC = \angle OCA$

কিন্তু বহিঃ $\angle AOD = \angle OAC + \angle OCA$ (উপ ১৩, অনু ১)

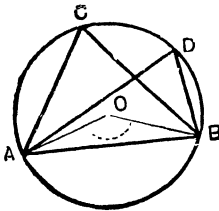
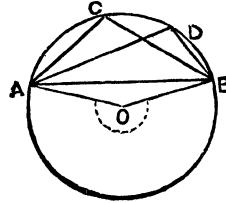
$\therefore \quad \angle AOD = 2\angle OCA$

এই প্রকার, $\angle BOD = 2\angle OCB$.

অতএব, প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় চিত্রে AOD, BOD কোণের সমষ্টি OCA, OCB কোণের সমষ্টির দ্বিগুণ এবং চতুর্থ চিত্রে BOD, AO › কোণের অন্তর OCB, OCA কোণের অন্তরের দ্বিগুণ।

∴ প্রত্যেকস্থলেই ∠AOB = 2∠ACB.

উপপাদ্য ৪০

একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র)

মনে কর, ACB, ADB একই ACDB বৃত্তাংশস্থ দুটি কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠ACB = ∠ADB.

মনে কর O বৃত্তের কেন্দ্র; OA, OB সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। এখন একই চাপ AB বৃত্তের কেন্দ্রে AOB সম্মুখকোণ এবং পরিধিতে ACB সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিয়াছে বলিয়া;

∠AOB = 2∠ACB (উপ ৩৯)

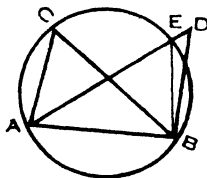
অর্থাৎ ∠ACB, AOB কোণের অর্ধেক।

এই প্রকার ∠ADB, AOB কোণের অর্ধেক।

∴ ∠ACB = ∠ADB.

দ্রষ্টব্য। নির্দিষ্ট বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বড় (যেমন প্রথম চিত্রে) অথবা অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ছোট (যেমন দ্বিতীয় চিত্রে) হইতে পারে, এবং ঐ শেষোক্ত অবস্থায় ∠AOB প্রবৃদ্ধ কোণ হইবে।

উপপাদ্য ৪০এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা

যদি দুইটি বিন্দু সংযোজক সরলরেখা উহার একই পার্শ্বস্থ অপর দুই বিন্দুতে সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে, তবে ঐ চারিটি বিন্দু একই পরিধিস্থ হইবে।

মনে কর, A ও B দুটি বিন্দু সংযোজক AB সরলরেখা উহার একই পার্শ্বস্থ C ও D এই দুই বিন্দুতে ACB ও ADB দুটি সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে A, B, C, ও D একই পরিধিস্থ; অর্থাৎ A, B, ও C দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত D দিয়া যাইবে।

প্রমাণ। যদি A, B ও C দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত D দিয়া না যায়, তবে উহা AD বা বর্ধিত ADকে কোনও E বিন্দুতে ছেদ কবিবে।

EB সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, $\angle ACB = \angle AEB$, একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া;

কিন্তু দেওয়া আছে যে, $\angle ACB = \angle ADB$

$\therefore \quad \angle AEB = \angle ADB.$

কিন্তু ইহা অসম্ভব, কারণ BDE ত্রিভুজের বহিঃকোণ AEB উহার বিপরীত অন্তঃকোণ ADBএর সমান হইতে পারে না।

$\therefore$ A, B ও C দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত D দিয়া না যাইয়াই পারে না।

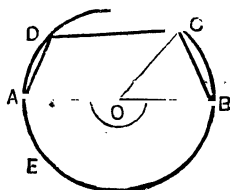
$\therefore$ A, B, C ও D একই পরিধিস্থ।

অনুসিদ্ধান্ত। একই ভূমির উপর এবং উহার একই পার্শ্বে অঙ্কিত ত্রিভুজের শিরঃকোণ কোনও নির্দিষ্ট কোণের সমান হইলে, উহার শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ কোন বৃত্তের এমন একটি চাপ হইবে যেন নির্দিষ্ট ভূমি উহার জ্যা হয়।

উপপাদ্য ৪১

(১) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

(২) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ।

(৩) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ।

(১) মনে কর ABC একটি বৃত্ত, O উহার কেন্দ্র। আরও মনে কর যেন AB উহার একটি ব্যাস এবং ACB অর্ধবৃত্তের উপর C কোন বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠ACB = এক সমকোণ।

প্রমাণ। পরিধিস্থ ACB কোণ = কেন্দ্রস্থ AOB সরল কোণের অর্ধেক ; কারণ, উহারা একই AEB চাপের উপর দণ্ডায়মান। (উপ ৩৯)

কিন্তু এক সরল কোণ = ২ সমকোণ

∴ ∠ACB = এক সমকোণ

বিকল্প প্রমাণ

OC সংযুক্ত কর।

এখন OA = OC, একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া,

∴ ∠OCA = ∠OAC. (উপ ১৬)

আবার যেহেতু OB = OC

∴ ∠OCB = ∠OBC

∴ সমস্ত ∠ACB = ∠OAC + ∠OBC.

কিন্তু ABC ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান ;

∴ ∠ACB = এক সমকোণ।

(২) মনে কর ABC একটি বৃত্ত, O উহার কেন্দ্র। আরও মনে কর AC একটি জ্যা এবং AEC বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বড়, এবং উহার উপর B কোন এক বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠ABC সূক্ষ্মকোণ।

প্রমাণ। OC সংযুক্ত কর।

এখন পরিধিস্থ ABC কোণ = কেন্দ্রস্থ AOC কোণের অর্ধেক ; কারণ, উহারা একই ADC চাপের উপর দণ্ডায়মান। (উপ ৩৯)

কিন্তু ∠AOC দুই সমকোণ অপেক্ষা ছোট।

∴ ∠ABC এক সমকোণ অপেক্ষা ছোট বা সূক্ষ্মকোণ।

(৩) মনে কর ABC একটি বৃত্ত, O উহার কেন্দ্র। আরও মনে কর, ADC বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ছোট এবং D উহার উপর কোন এক বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠ADC স্থূলকোণ।

প্রমাণ। OC সংযুক্ত কর।

এখন পরিধিস্থ ADC কোণ = কেন্দ্রস্থ AOC প্রবৃদ্ধ কোণের অর্ধেক ; কারণ, উহারা একই AEC চাপের উপর দণ্ডায়মান। (উপ ৩৯)

কিন্তু প্রবৃদ্ধ কোণ দুই সমকোণ অপেক্ষা বড় ;

∴ ∠ADC এক সমকোণ অপেক্ষা বড় বা স্থূলকোণ।

অনুশীলনী ২২

১। বৃত্তের সমান সমান চাপ পরিধিতে যে সকল সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে, তাহারা পরস্পর সমান।

২। বৃত্তের যে সকল চাপ পরিধিতে সমান সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে, তাহারা পরস্পর সমান।

৩। বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা উহাদের মধ্যে সমান সমান চাপ উৎপন্ন করিবে।

৪। TP ও TQ বৃত্তের দুটি স্পর্শক এবং R, TPQ ত্রিভুজের বাহিরে পরিধিস্থ কোনও বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে, TPR ও TQR কোণদ্বয়ের সমষ্টি সর্বদা একই হইবে।

৫। দুটি জ্যা বৃত্তের ভিতরে প্রতিচ্ছেদ করিলে তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ, উহারা যে দুই চাপ ছেদন করে তাহাদের সমষ্টির অর্ধেক চাপ কেন্দ্রে যে সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিবে তাহার সমান হইবে।

৬। দুটি জ্যা বৃত্তের বাহিরে প্রতিচ্ছেদ করিলে তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ, উহারা যে দুই চাপ ছেদন করে তাহাদের অন্তরের অর্ধেক চাপ কেন্দ্রে যে সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিবে তাহার সমান হইবে।

৭। দুটি জ্যা বৃত্তের ভিতরে সমকোণে প্রতিচ্ছেদ করিলে, বিপরীত চাপদ্বয়ের সমষ্টি অর্ধপরিধির সমান হইবে।

৮। বৃত্তের কোনও দুটি AB ও CD চাপের অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ নির্দিষ্ট হইলে, দেখাও যে AC ও BD চাপের সমষ্টি নির্দিষ্ট হইবে।

৯। দুটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে, A বিন্দু দিয়া উহাদের পরিধি পর্যন্ত যে কোন PAQ সরলরেখা B বিন্দুতে সর্বদা সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিবে।

১০। AB বৃত্তের একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং P পরিধিস্থ কোনও বিন্দু; প্রমাণ কর যে, APB কোণের দ্বিখণ্ডক দুই নির্দিষ্ট বিন্দুর যে কোন একটি দিয়া যাইবে।

১১। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত বিপরীত শীর্ষ দিয়া যাইবে।

১২। যে দুই সরলরেখা বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যাএর একই পার্শ্বের অথবা বিপরীত পার্শ্বের প্রান্তবিন্দুগুলি সংযুক্ত করে তাহারা সমান।

সংজ্ঞা

কোন চতুর্ভুজের চারিটি শীর্ষ দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারিলে তাহাকে **বৃত্তস্থ** (cyclic) বলে।

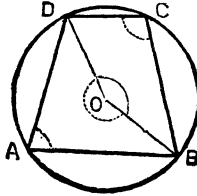
যে ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমস্ত কৌণিক বিন্দু কোনও বৃত্তের পরিধিতে থাকে তাহাকে ঐ বৃত্তে **অন্তর্লিখিত** (inscribed) হইল বলা হয়।

চারি বা ততোধিক বিন্দু দিয়া যদি একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় তবে তাহাদিগকে **এক পরিধিস্থ** (concyclic) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য। যে তিন বিন্দু এক সরলরেখাস্থ নহে তাহারা সর্বদাই এক পরিধিস্থ। (উপ ৩২)

উপপাদ্য ৪২

বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনও চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।

বিপরীতক্রমে, কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক হইলে, উহার শীর্ষগুলি এক পরিধিস্থ হইবে।

মনে কর, ABC বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD একটি চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) BAD, BCD কোণ দুটি সম্পূরক ;
(২) ABC, ADC কোণ দুটি সম্পূরক।

মনে কর O বৃত্তের কেন্দ্র ; BO, DO সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। এখন পরিধিস্থ BAD কোণ = কেন্দ্রস্থ BOD কোণের অর্ধেক ; কারণ, উহারা একই BCD চাপের উপর দণ্ডায়মান। (উপ ৩৯)

এবং পরিধিস্থ BCD কোণ = কেন্দ্রস্থ BOD প্রবৃদ্ধ কোণের অর্ধেক ; কারণ, উহারা একই BAD চাপের উপর দণ্ডায়মান। (উপ ৩৯)

$\therefore$ BAD, BCD কোণ দুটি একত্রযোগে

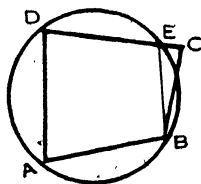
= $\angle$BOD ও প্রবৃদ্ধ $\angle$BOD এর সমষ্টির অর্ধেক ;

= ৪ সমকোণের অর্ধেক ;

= ২ সমকোণ।

$\therefore$ BAD ও BCD কোণ দুটি সম্পূরক। ... (১)

এই প্রকারে, OA এবং OC সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ করা যাইতে পারে যে ABC, ADC কোণ দুটি সম্পূরক। ... (২)

বিপরীতক্রমে, মনে কর ABCD একটি চতুর্ভুজ, ইহার A ও C বিপরীত কোণ দুটি পরস্পর সম্পূরক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে A, B, C ও D একই পরিধিস্থ।

প্রমাণ। B, A, D এই তিন বিন্দু দিয়া কেবল একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, (উপ ৩২), এবং ঐ বৃত্ত C দিয়া যাইবে।

কারণ, যদি ঐ বৃত্ত C দিয়া না যায়, তবে উহা DC বা বর্ধিত DCকে কোন এক E বিন্দুতে ছেদ করিবে।

EB সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABED একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ হইল, অতএব উহার BAD, BED কোণ দুটি সম্পূরক হইবে।

কিন্তু দেওয়া আছে যে, BAD, BCD কোণ দুটি সম্পূরক।

$\therefore \quad \angle BED = \angle BCD.$

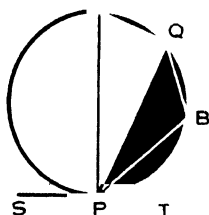
কিন্তু তাহা অসম্ভব, কারণ BCE ত্রিভুজের বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হইতে পারে না।

$\therefore$ B, A, D দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত C দিয়া যাইবেই।

$\therefore$ A, B, C ও D একই পরিধিস্থ।

দ্রষ্টব্য। ABCD চতুর্ভুজের AC, BD কর্ণ দুটি অঙ্কিত করিয়া উপপাদ্য ৪২ প্রমাণ করা যাইতে পারে। শিক্ষার্থিগণ ঐ প্রকারে প্রমাণ করিবে।

উপপাদ্য ৪৩

একটি সরলরেখা কোন বৃত্তকে স্পর্শ করিলে, স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোনও জ্যা স্পর্শকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করিবে তাহা একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণের সমান হইবে।

মনে কর, ST সরলরেখা APB বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিল। আরও মনে কর PQ P দিয়া অঙ্কিত একটি জ্যা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, (১) ∠TPQ = PAQ একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ, (২) ∠SPQ = PBQ একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ।

অঙ্কন। (১) মনে কর, PA বৃত্তের ব্যাস এবং B, PBQ উপচাপের উপর কোনও বিন্দু; AQ, QB, BP সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। P বিন্দুতে SPT স্পর্শক এবং PA P বিন্দুগামী ব্যাস বলিয়া; ∠TPA = এক সমকোণ; (উপ ৩৬)

আবার, ∠PQA = এক সমকোণ; অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া,

∴ QPA, PAQ কোণ দুটি একত্রযোগে এক সমকোণের সমান।

∴ ∠TPA = ∠QPA + PAQ.

উভয় দিক্ হইতে QPA সাধারণ কোণ বিয়োগ করিয়া,

∠TPQ = ∠PAQ এবং ইহা PAQ একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ।

(২) APBQ চতুর্ভুজ ABP বৃত্তে অন্তর্লিখিত হইয়াছে বলিয়া,

∠PBQ = PAQ বিপরীত কোণের সম্পূরক;

কিন্তু ∠PAQ = ∠TPQ

∴ ∠PBQ = TPQ কোণের সম্পূরক = ∠SPQ.

অর্থাৎ, ∠SPQ = ∠PBQ, এবং ইহা PBQ একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ।

অনুশীলনী ২৩

১। ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, ABE ও DCE ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ হইবে।

২। যদি কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় সমকোণে ছেদ করে তবে, ছেদবিন্দু হইতে উহার যে কোনও বাহুর উপর পাতিত লম্ব বর্ধিত করিলে, উহা বিপরীত বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করিবে। (ব্রহ্মগুপ্ত, জন্ম ৫৯৮ খৃঃ)

৩। ABC একটি ত্রিভুজ কোনও বৃত্তে অন্তর্লিখিত হইলে যদি উহার কোণত্রয়ের দ্বিখণ্ডকগুলি পরিধিকে যথাক্রমে X, Y, Z বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, XYZ ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের কোণগুলির অর্ধেকের পূরক হইবে।

৪। দুটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করিলে যদি ভিতরেরটির ব্যাস বাহিরেরটির ব্যাসার্ধ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, স্পর্শবিন্দু হইতে বাহিরের বৃত্তের যে কোনও জ্যা ভিতরেরটির পরিধি দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৫। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB ও AC সমান বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y হইলে, প্রমাণ কর যে B, C, X, Y এই চারিটি বিন্দু এক পরিধিস্থ হইবে।

৬। একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোন বাহু বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণ উহার বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হইবে।

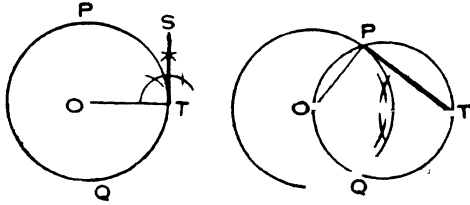
৭। বৃত্তে অন্তর্লিখিত প্রত্যেক সামান্তরিকই আয়তক্ষেত্র হইবে এবং উহার কর্ণদ্বয় পরস্পর কেন্দ্রে ছেদ করিবে।

৮। বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের কোনও এক কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের পরিধিতে মিলিত হইবে।

৯। কোনও চতুর্ভুজের চারি কোণের (১) অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলি অথবা (২) বহির্দ্বিখণ্ডকগুলি যে চতুর্ভুজ উৎপন্ন করে তাহা একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত হইতে পারে।

১০। দুটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোনও সরলরেখা বৃত্ত দুটি হইতে যে বৃত্তাংশ ছেদন করিবে উহাদের যে কোন দুই অনুরূপ বৃত্তাংশস্থ কোণ পরস্পর সমান হইবে।

সম্পাদ্য ১৬

একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর O নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এবং T একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

T বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

(১) T বৃত্তের পরিধিতে থাকিলে, (যেমন প্রথম চিত্রে)

অঙ্কন। OT সংযুক্ত কর; T হইতে OT এর উপর TS লম্ব টান। তাহা হইলে, T বিন্দুতে TS ঐ বৃত্তের স্পর্শক হইল। (উপ ৩৬, অনু ১)

(২) T বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত হইলে, (যেমন দ্বিতীয় চিত্রে)।

অঙ্কন। OT সংযুক্ত কর; OTকে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত আঁক, ইহা যেন প্রদত্ত বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

PT, QT সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, T হইতে PT ও QT বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ। OP সংযুক্ত কর।

$\angle OPT =$ এক সমকোণ, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া,

$\therefore$ OP ব্যাসার্ধের উপর PT লম্ব।

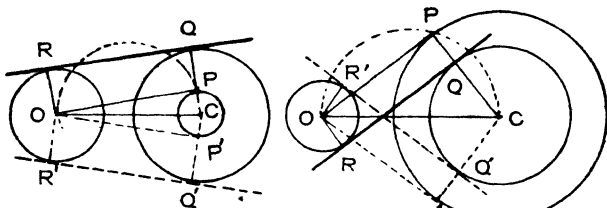
$\therefore$ P বিন্দুতে PT স্পর্শক।

এই প্রকার, Q বিন্দুতে QT স্পর্শক।

মন্তব্য। T বৃত্তের ভিতরে থাকিলে, OT ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত নির্দিষ্ট বৃত্তকে ছেদ করিবে না। সুতরাং এস্থলে কোন স্পর্শকই টানা যাইবে না।

দ্রষ্টব্য। OT ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত নির্দিষ্ট বৃত্তকে দুইটি মাত্র বিন্দুতে ছেদ করিবে। সুতরাং এস্থলে **দুইটি মাত্র** স্পর্শক পাওয়া যাইবে।

সম্পাদ্য ১৭

দুটি নির্দিষ্ট বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র)

মনে কর, C বৃহত্তর বৃত্তের কেন্দ্র এবং R উহার ব্যাসার্ধ।

আরও মনে কর, O ক্ষুদ্রতর বৃত্তের কেন্দ্র এবং r উহার ব্যাসার্ধ।

এই বৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শক আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন। Cকে কেন্দ্র করিয়া এবং ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর (যেমন প্রথম চিত্রে) অথবা সমষ্টি (যেমন দ্বিতীয় চিত্রে) ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক।

O হইতে এই বৃত্তের OP স্পর্শক টান; P যেন উহার স্পর্শবিন্দু।

CP সংযুক্ত কর এবং আবশ্যক হইলে CP বর্ধিত কর যেন উহা C কেন্দ্র বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

O হইতে PQ এর সমান্তরাল OR টান, যেন PQ ও OR একই দিকে প্রসারিত হয়।

QR সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, QR নির্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক হইল।

প্রমাণ। প্রথম চিত্রে যেহেতু, $CQ = R$ এবং $CP = R - r$

$\therefore \quad PQ = CQ - CP = R - (R - r) = r$

কিন্তু, $OR = r, \quad \therefore \quad PQ = OR.$

দ্বিতীয় চিত্রে, যেহেতু, $CP = R + r$ এবং $QC = R$

$\therefore \quad PQ = PC - QC = (R + r) - R = r.$

কিন্তু, $OR = r$, $\therefore$ $PQ = OR$.

এখন উভয় চিত্রেই, PQ ও OR সমান এবং সমান্তরাল বলিয়া,

OP ও QR সমান্তরাল ;

$\therefore$ OPQR একটি সামান্তরিক।

কিন্তু, $\angle OPC =$ এক সম $\angle$

$\therefore$ $\angle RQC$, $\angle QRO$ ইহাদের প্রত্যেকেই এক সমকোণ ;

$\therefore$ QR বৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শক।

দ্রষ্টব্য। যেহেতু O হইতে সাধারণত OP, OP′ দুটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়, সুতরাং উভয় চিত্রে নির্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের দুটি করিয়া সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইবে।

যদি এই সাধারণ স্পর্শক দুটি পরস্পর বৃত্তদ্বয়ের মধ্যে ছেদ না করে (যেমন প্রথম চিত্রে) তবে উহাদিকে **সরল সাধারণ স্পর্শক** (direct common tangents) বলে এবং পরস্পর বৃত্তদ্বয়ের মধ্যে ছেদ করিলে (যেমন দ্বিতীয় চিত্রে) উহাদিগকে **তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক** (transverse common tangents) বলে।

মন্তব্য। উক্ত সম্পাদ্যে লক্ষ্য করিবে যে,

(১) যদি নির্দিষ্ট বৃত্ত দুটির কেন্দ্রের দূরত্ব তাহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়, অর্থাৎ যদি বৃত্ত দুটি বহিঃস্পর্শ করে, তবে উহাদের তিনটি সাধারণ স্পর্শক হইবে—দুটি সরল ও একটি তির্যক্।

(২) যদি কেন্দ্রের দূরত্ব তাহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা কম কিন্তু অন্তর অপেক্ষা বেশি হয় অর্থাৎ যদি বৃত্ত দুটি পরস্পর ছেদ করে তবে উহাদের দুইটি সাধারণ স্পর্শক হইবে—উভয়েই সরল সাধারণ স্পর্শক।

(৩) যদি কেন্দ্রের দূরত্ব তাহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তরের সমান হয় অর্থাৎ যদি তাহারা অন্তঃস্পর্শ করে তবে তাহাদের একটিমাত্র সাধারণ স্পর্শক হইবে।

(৪) যদি কেন্দ্রের দূরত্ব তাহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর অপেক্ষা কম হয়, অর্থাৎ বৃত্ত দুটির একটি অপরটির ভিতরে থাকে তবে কোন সাধারণ স্পর্শকই অঙ্কিত করা যাইবে না।

অনুশীলনী ২৪

১। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক টানিতে হইবে। ঐরূপ কয়টি স্পর্শক টানা যাইবে?

২। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের এমন একটি স্পর্শক টান যাহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করিবে।

৩। বৃত্তের ভিতরে বা বাহিরে অবস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া ব্যাসের অনধিক কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য পরিমিত জ্যা টানিতে হইবে।

৪। বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু দিয়া এমন একটি জ্যা টান যাহা ঐ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৫। বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু দিয়া ক্ষুদ্রতম জ্যা টান।

৬। পরস্পর হইতে ৩″ দূরে A ও B দুটি বিন্দু লও। A ও Bকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে ১″ ও ১·৫″ ব্যাসার্ধ লইয়া দুটি বৃত্ত আঁকিয়া উহাদের দুটি (১) সরল সাধারণ এবং (২) তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক টান। মাপিয়া উহাদের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উহারা সমান কি?

৭। উক্ত উদাহরণে যে দুটি সরল সাধারণ স্পর্শক অথবা তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক টানিলে তাহাদের ছেদবিন্দু AB বা বর্ধিত AB রেখার উপর পড়িল কি? স্পর্শকগুলি ঠিক টানা হইলে ছেদবিন্দু AB বা বর্ধিত ABএর উপর পড়িবে।

৮। পরস্পর হইতে ৩·৫″ দূরে A ও B দুটি বিন্দু লও। A ও Bকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে ২″ ও ২·৫″ ব্যাসার্ধ লইয়া দুটি বৃত্ত আঁকিয়া উহাদের সাধারণ স্পর্শকগুলি টান। বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা টানিয়া উহার দৈর্ঘ্য মাপিয়া নির্ণয় কর। ঐ জ্যাকে বর্ধিত করিয়া মাপনীর সাহায্যে দেখাও যে, উহা সাধারণ স্পর্শকগুলির প্রত্যেককে দ্বিখণ্ডিত করে।

৯। ইচ্ছামত সমান সমান দুটি বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া উহাদের সরল সাধারণ স্পর্শকগুলি টান।

নির্দিষ্ট নিয়মাধীন বৃত্ত অঙ্কন

তোমরা দেখিয়াছ একটি বৃত্তের (১) কেন্দ্রের অবস্থান এবং (২) ব্যাসার্ধের পরিমাণ জানিতে পারিলেই বৃত্তটি অঙ্কিত করা যায় (স্বীকার্য ৩)। সুতরাং নির্দিষ্ট নিয়মাধীন কোন বৃত্ত আঁকিতে হইলেই দেখিবে যে, উহার কেন্দ্রের অবস্থান ও ব্যাসার্ধের পরিমাণ নির্ণয় করা যায় কি না। কেন্দ্রের অবস্থান জানিতে হইলে উহা কোন্ দুই নিয়মাধীন অর্থাৎ কোন্ দুই সঞ্চারপথের ছেদবিন্দু তাহা জানিতে হইবে। এবং কেন্দ্রের অবস্থান জানিয়া বৃত্তের পরিধির যে কোনও একটি বিন্দু জানিতে বা নির্ণয় করিতে পারিলেই বৃত্তটি আঁকা যাইবে। সুতরাং দেখিতেছ একটি বৃত্ত আঁকিতে হইলে উহা কোন্ তিনটি নিয়মাধীন তাহা জানিতে হইবে।

নির্দিষ্ট নিয়মাধীন বৃত্ত অঙ্কন করিবার পূর্বে শিক্ষার্থিগণকে নিম্নলিখিত সঞ্চারপথগুলি সম্যকরূপে জানিতে হইবে।

(১) যে সকল বৃত্ত দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়, তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ। (অনুশীলনী ১৭, উদা ২ দেখ)

(২) যে সকল বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ। (উপ ৩৬, অনু ৩ দেখ)

(৩) যে সকল বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ। (উদা ৩, ১৯৪ পৃষ্ঠা দেখ)

(৪) যে সকল বৃত্ত দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করে তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ। (উদা ৬, ১৯৪ পৃষ্ঠা দেখ)

(৫) যে সকল বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট আছে এবং যাহারা কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করে তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ।

(৬) যে সকল বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট আছে এবং যাহারা কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ।

পরীক্ষার্থ প্রশ্নমালা

১। যে বৃত্ত দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় তাহার কেন্দ্র কোন্ রেখায় থাকিবে ?

ইহা হইতে, যে বৃত্ত দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় এবং যাহার কেন্দ্র কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর থাকে তাহার কেন্দ্র নির্ণয় কর।

২। যদি কোন বৃত্ত A ও B দুটি বিন্দু দিয়া যায় তবে তাহার কেন্দ্র কোন্ রেখায় থাকিবে ?

যদি কোন বৃত্ত B ও C দুটি বিন্দু দিয়া যায়, তবে তাহার কেন্দ্র কোন্ রেখায় থাকিবে ?

ইহা হইতে, A, B ও C দিয়া যে বৃত্ত যায় তাহার কেন্দ্র নির্ণয় কর।

৩। যে বৃত্ত AB ও AC দুটি সরলরেখাকে স্পর্শ করে তাহার কেন্দ্র কোন্ রেখায় থাকিবে ?

যে বৃত্ত BA ও BC দুটি সরলরেখাকে স্পর্শ করে, তাহার কেন্দ্র কোন্ রেখায় থাকিবে ? ইহা হইতে, যে বৃত্ত AB, AC, ও BCকে স্পর্শ করে তাহার কেন্দ্র নির্ণয় কর।

৪। যে বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহার কেন্দ্র কোন্ রেখায় থাকিবে ?

ইহা হইতে, যে বৃত্ত কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (১) যাহার ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট আছে বা (২) যাহার কেন্দ্র অন্য কোন সরলরেখায় অবস্থিত সেই বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় কর। এইরূপ কয়টি কেন্দ্র পাওয়া যাইবে ?

৫। যে বৃত্ত কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহার কেন্দ্র কোন্ রেখায় থাকিবে ?

ইহা হইতে, যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট আছে এবং যাহা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহার কেন্দ্র নির্ণয় কর। এইরূপ কয়টি কেন্দ্র পাওয়া যাইবে ?

৬। নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট যে বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করে তাহার কেন্দ্র কোন্ রেখায় থাকিবে ?

নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট যে বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে তাহার কেন্দ্র কোন্ রেখায় থাকিবে ?

ইহা হইতে, নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট যে বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে তাহার কেন্দ্র নির্ণয় কর। ঐরূপ কয়টি কেন্দ্র পাওয়া যাইবে ? এবং কি কি পক্ষ উপস্থিত হইবে বল।

অনুশীলনী ২৫

১। দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন উহার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় থাকে।

২। নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে।

৩। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত আঁক যেন উহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

৪। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত আঁক যেন উহা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

৫। নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্ত আঁক যেন উহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

৬। নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এমন একটি বৃত্ত আঁক যাহা দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করে।

৭। এমন একটি বৃত্ত আঁক যাহা দুটি সমান্তরাল সরলরেখা এবং উহাদের একটি ভেদককে স্পর্শ করে। দেখাও যে, ঐরূপ দুটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়। ঐ বৃত্ত দুটি সমান দেখাইতে পার কি ?

৮। কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত আঁক।

৯। দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন একটি বৃত্ত আঁক যাহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। কখন ইহা সম্ভব হইবে না ?

১০। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

দ্রষ্টব্য। নির্দিষ্ট নিয়মাধীন বৃত্ত অঙ্কন সম্বন্ধে আরও উদাহরণের জন্য পঞ্চম ভাগের ৬ষ্ঠ পরিচ্ছেদ দেখ।

সম্পাদ্য ১৮

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর এমন একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত করিতে হইবে যেন ঐ বৃত্তাংশস্থ কোণ কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং $\angle C$ নির্দিষ্ট কোণ।

ABএর উপর একটি বৃত্তাংশ আঁকিতে হইবে যেন ঐ বৃত্তাংশস্থ কোণ C কোণের সমান হয়।

অঙ্কন। BA রেখার A বিন্দুতে C কোণের সমান BAD কোণ আঁক। A হইতে AD এর উপর AE লম্ব টান,

AB এর লম্ব দ্বিখণ্ডক টান, উহা যেন AE কে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক।

তাহা হইলে, BAD কোণের একান্তর বৃত্তাংশ উদ্দিষ্ট বৃত্তাংশ হইবে।

প্রমাণ। O ABএর লম্ব দ্বিখণ্ডকের উপর বলিয়া, OA = OB

∴ ঐ বৃত্ত B দিয়া যাইবে। সুতরাং AB ঐ বৃত্তের জ্যা হইবে।

আবার AD ঐ বৃত্তের স্পর্শক, কারণ OA, ADএর উপর লম্ব। সুতরাং AGB একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ BAD (অর্থাৎ C) কোণের সমান হইবে।

দ্রষ্টব্য। নির্দিষ্ট কোণ সমকোণ হইলে, স্পষ্টই উদ্দিষ্ট বৃত্তাংশ, AB এর উপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্ত হইবে।

অনু ১। একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত হইতে উহার যে বৃত্তাংশস্থ কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে তাহা ছেদ করিতে হইলে বৃত্তের যে কোন একটি স্পর্শক টানিয়া উহার সহিত স্পর্শবিন্দুতে নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ করিয়া বৃত্তের একটি জ্যা টানিলেই উদ্দিষ্ট বৃত্তাংশ পাওয়া যাইবে।

অনু ২। যে বৃত্ত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু B দিয়া যায় এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ADকে কোন নির্দিষ্ট (A) বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহা অঙ্কিত করিতে হইলে, BA সংযুক্ত করিয়া AB এর উপর এমন একটি বৃত্তাংশ আঁকিতে হইবে যেন ঐ বৃত্তাংশস্থ কোণ BAD কোণের সমান হয়।

অনুশীলনী ২৬

১। একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া উহার যে বৃত্তাংশস্থ কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান, তাহা ছেদ করিতে হইবে।

২। একটি বৃত্তকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন উহার এক বৃত্তাংশস্থ কোণ অপর বৃত্তাংশস্থ কোণের দ্বিগুণ হয়।

৩। একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর নির্দিষ্ট শিরঃকোণ বিশিষ্ট এমন একটি ত্রিভুজ আঁক যেন উহার শীর্ষ কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর পড়ে।

৪। ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ এবং অন্য এক বাহুর পরিমাণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৫। কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর নির্দিষ্ট শিরঃকোণ বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁক যেন উহার উন্নতি নির্দিষ্ট পরিমিত হয়।

৬। কোন ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[মনে কর, ত্রিভুজের ভূমি AB, শিরঃকোণ X এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি Y সরলরেখার সমান। ABএর উপর এমন একটি বৃত্তাংশ আঁক যেন ঐ বৃত্তাংশস্থ কোণ X কোণের সমান হয়। AB এর লম্ব দ্বিখণ্ডক টান, উহা যেন ঐ বৃত্তাংশকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক এবং A কে কেন্দ্র করিয়া Y এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি বৃত্ত আঁক। এই বৃত্ত দুটি যেন E বিন্দুতে ছেদ করিল। AE সংযুক্ত কর, ইহা যেন ঐ বৃত্তাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC, BC সংযুক্ত করিলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ পাইবে।]

৭। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

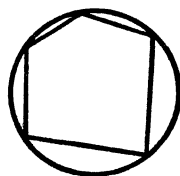
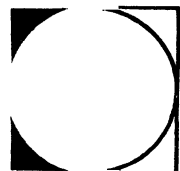
[অতিভুজকে ভূমি ধরিয়া উদা ৬এ প্রদর্শিত প্রণালীতে কার্য কর]।

৮। ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ এবং শীর্ষগামী মধ্যমা দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৯। ত্রিভুজের ভূমি (AB), শিরঃকোণ (∠X) ও অপর দুই বাহুর অন্তর (Y) দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[AB এর উপর এমন একটি বৃত্তাংশ আঁক যেন ঐ বৃত্তাংশস্থ কোণ X কোণের সমান হয়। AB এর লম্ব দ্বিখণ্ডক টান, উহা যেন ঐ বৃত্তাংশের অনুবন্ধী বৃত্তাংশকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত এবং Aকে কেন্দ্র করিয়া Yএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অন্য একটি বৃত্ত আঁক। বৃত্ত দুটি যেন E বিন্দুতে ছেদ করিল। AE সংযুক্ত কর। বর্ধিত AE যেন ঐ বৃত্তাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC ও BC সংযুক্ত করিলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ পাইবে।]

সংজ্ঞা

যদি একটি বৃত্তের পরিধি কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের শীর্ষগুলি দিয়া যায় তবে ঐ বৃত্ত ঐ ক্ষেত্রে **পরিলিখিত** (circumscribed) হইল বলা হয়। এবং ঐ ক্ষেত্র ঐ বৃত্তে **অন্তর্লিখিত** (inscribed) হইল বলা হয়। যথা, পার্শ্বের চিত্রে বৃত্তটি পঞ্চভুজে পরিলিখিত হইল এবং পঞ্চভুজটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত হইল।

যদি একটি বৃত্ত কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুকে স্পর্শ করে, তবে ঐ বৃত্ত ঐ ক্ষেত্রে **অন্তর্লিখিত** হইল বলা হয়; এবং ঐ ক্ষেত্র ঐ বৃত্তে **পরিলিখিত** হইল বলা হয়। যথা, পার্শ্বের চিত্রে বৃত্তটি চতুর্ভুজে অন্তর্লিখিত হইল এবং চতুর্ভুজটি ঐ বৃত্তে পরিলিখিত হইল।

কোন ত্রিভুজে পরিলিখিত বৃত্তকে উহার **পরিবৃত্ত** (circumscribed circle বা circumcircle) বলে। পরিবৃত্তের কেন্দ্রকে **পরিকেন্দ্র** (circumcentre) বলে।

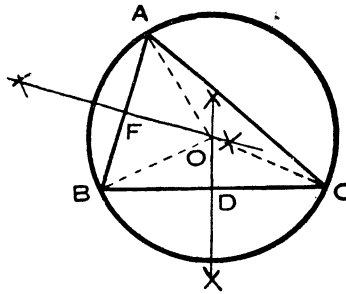
কোন ত্রিভুজে অন্তর্লিখিত বৃত্তকে উহার **অন্তর্বৃত্ত** (inscribed

circle বা in-circle) বলে। অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্রকে **অন্তঃকেন্দ্র** (in-centre) বলে।

যদি কোন বৃত্ত একটি ত্রিভুজের কোনও এক বাহু এবং বর্ধিত অন্য দুই বাহুকে স্পর্শ করে, তবে ঐ বৃত্ত ঐ ত্রিভুজে **বহির্লিখিত** (escribed) হইল বলা হয়। বহির্লিখিত বৃত্তকে **বহির্বৃত্ত** (ex-circle) এবং উহার কেন্দ্রকে **বহিঃকেন্দ্র** (ex-centre) বলে।

মন্তব্য। প্রত্যেক ত্রিভুজেরই তিনটি বহির্বৃত্ত আছে।

সম্পাদ্য ১৯

কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজে একটি বৃত্ত পরিলিখিত করিতে হইবে।

মনে কর, ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজে একটি বৃত্ত পরিলিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। FO ও DO যথাক্রমে AB ও BC এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক টান ;
FO, DO যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল।

Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক।
ইহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইল।

প্রমাণ। OA, OB, OC সংযুক্ত কর।

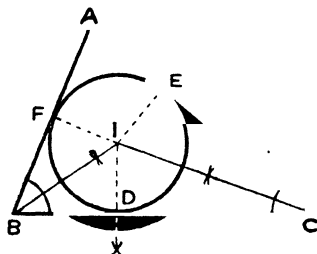
এখন, FO ABএর লম্ব-দ্বিখণ্ডক বলিয়া, OA = OB. (উপ ২৯)

আবার, DO BCএর লম্ব-দ্বিখণ্ডক বলিয়া, OB = OC.

$\therefore$ OA = OB = OC.

অতএব, Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত B ও C দিয়াও যাইবে, অর্থাৎ ঐ বৃত্ত ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত হইবে।

সম্পাদ্য ২০

কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজে একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

মনে কর, ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজে একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ABC ও BCA কোণ দুটিকে যথাক্রমে BI ও CI সরলরেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত কর; উহারা যেন I বিন্দুতে মিলিত হইল।

I হইতে BC এর উপর ID লম্ব টান।

Iকে কেন্দ্র করিয়া ID ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক।

ইহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইল।

প্রমাণ। IE, IF যথাক্রমে AC ও AB এর উপর লম্ব টান।

এখন, CI BCAকোণের দ্বিখণ্ডক বলিয়া, I বিন্দু BC এবং AC হইতে সমদূরবর্তী।

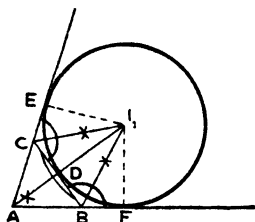
$\therefore$ ID = IE. (উপ ৩০)

সেইরূপ, ID = IF ;

$\therefore$ ID = IE = IF.

অতএব, Iকে কেন্দ্র করিয়া, ID ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত, E ও F দিয়া যাইবে। এবং IDC, IEA, IFB কোণের প্রত্যেকে সমকোণ বলিয়া, ঐ বৃত্ত ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে স্পর্শ করিবে। (উপ ৩৬, অনু ১)

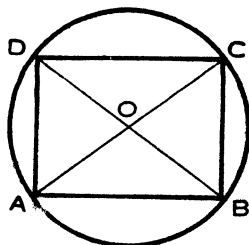
সম্পাদ্য ২১

কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজে একটি বৃত্ত বহির্লিখিত করিতে হইবে।

মনে কর, ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজে একটি বৃত্ত বহির্লিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। B ও C বিন্দুতে উৎপন্ন বহিঃকোণ দুটি যথাক্রমে BI_1, ও CI_1, সরলরেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত কর; উহারা যেন I_1 বিন্দুতে মিলিত হইল। I_1 হইতে BC এর উপর I_1D লম্ব টান। I_1কে কেন্দ্র করিয়া I_1D ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। ইহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইল।

প্রমাণ। ইহার প্রমাণ ২০শ সম্পাদ্যের প্রমাণের অনুরূপ।

সম্পাদ্য ২২

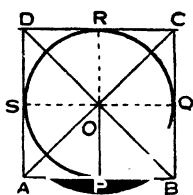
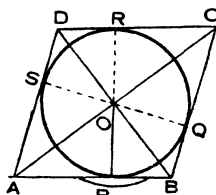
কোন নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রে একটি বৃত্ত পরিলিখিত করিতে হইবে।

মনে কর, ABCD নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রে একটি বৃত্ত পরিলিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AC, BD কর্ণ দুটি টান, উহারা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল।

Oকে কেন্দ্র করিয়া, OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক।

ইহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইল। প্রমাণ কর।

সম্পাদ্য ২৩

কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রে (বা রম্বসে) একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র)

মনে কর, ABCD নিদিষ্ট বর্গক্ষেত্রে (১ম চিত্র) অথবা নিদিষ্ট রম্বসে (২য় চিত্র) একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AC, BD কর্ণদ্বয় টান, উহারা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। O হইতে AB এর উপর OP লম্ব টান। Oকে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। ইহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইল।

প্রমাণ। OQ, OR, OS যথাক্রমে BC, CD ও DA এর উপর লম্ব টান।

এখন, $\angle ABD = \angle ADB$; কারণ, $AD = AB$.

কিন্তু $\angle ADB =$ একান্তর $\angle CBD$;

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$; $\therefore OQ = OP$. (উপ ৩০)

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, $OR = OQ$ এবং $OS = OP$.

$\therefore OP = OQ = OR = OS$.

∴ Oকে কেন্দ্র করিয়া, OP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত Q, R ও S দিয়া যাইবে।

অবার, P, Q, R ও S বিন্দুতে কোণগুলি সমকোণ বলিয়া, ঐ বৃত্ত ABCD ক্ষেত্রের বাহুগুলিকে স্পর্শ করিবে। (উপ ৩৬, অনু ১)

অনুশীলনী ২৭

১। ২, ৩ ও ৪ ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকিয়া, উহার উপর একটি বৃত্ত পরিলিখিত কর। মাপিয়া ঐ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

২। ৫, ১২ এবং ১৩ সেন্টিমিটর বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকিয়া, উহাতে একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত কর। মাপিয়া ঐ অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

৩। ABC যে কোন একটি সমকোণী ত্রিভুজে একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত কর। যদি BC ঐ ত্রিভুজের অতিভুজ এবং r উহার অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, AB ও AC এর সমষ্টি BC অপেক্ষা $2r$ বেশি হইবে।

৪। ABCD একটি চতুর্ভুজ আঁক যেন উহার বাহু AB = ২″, BC = ২·৫″, CD = ৩·৫″ এবং DA = ৩″ হয়। এখন উহার যে কোন তিন বাহু স্পর্শ করে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। বৃত্তটি অবশিষ্ট বাহুকে স্পর্শ করিল কি ? আঁকা ঠিক হইলে স্পর্শ করিবে।

৫। একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, যেন তাহা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে উহার কোন ব্যাসের দুই প্রান্তবিন্দুতে ছেদ করে।

৬। যে চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহুর সমষ্টি অপর জোড়া বিপরীত বাহুর সমষ্টির সমান তাহাতে একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

৭। সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট তিনটি বৃত্তকে স্পর্শ করে এমন একটি বৃত্ত আঁক। ঐরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইবে ? কখন ইহা অসম্ভব হইবে ?

[প্রথমে উহাদের কেন্দ্র দিয়া একটি বৃত্ত আঁক]

৮। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের এক চতুর্থাংশের সমান বৃত্তকলাতে একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

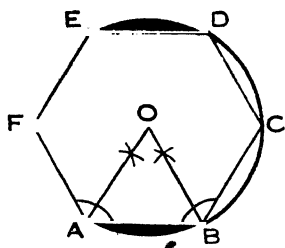
(তত্ত্বীয়)

৯। কোন ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত এককেন্দ্রীয় হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

১০। কোন সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ ও বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে উহার অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ ও তিনগুণ হইবে।

১১। কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র হইবে।

সম্পাদ্য ২৪

কোন নির্দিষ্ট সুষম বহুভুজে একটি বৃত্ত পরিলিখিত করিতে হইবে।

মনে কর ABCDEF নির্দিষ্ট বহুভুজে একটি বৃত্ত পরিলিখিত করিতে হইবে।

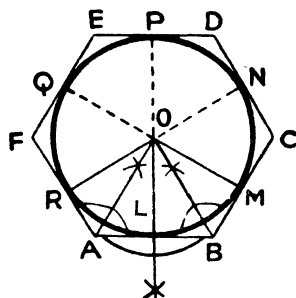
অঙ্কন। A ও B কোণ দুটিকে AO ও BO সরলরেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত কর; AO ও BO যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল।

Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ হইয়া একটি বৃত্ত আঁক।

ইহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইল।

প্রমাণ। কারণ, দেখান যাইতে পারে যে A, B, C···ইত্যাদি শীর্ষগুলি হইতে O সমদূরবর্তী (অনুশীলনী ২৮ উদা ১০)। সুতরাং Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত B, C ইত্যাদি শীর্ষগুলি দিয়া যাইবে।

সম্পাদ্য ২৫

কোন নির্দিষ্ট সুষম বহুভুজে একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

মনে কর, ABCDEF একটি নির্দিষ্ট বহুভুজ; ইহাতে একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A ও B কোণ দুটিকে দ্বিখণ্ডিত করিয়া যথাক্রমে AO ও BO সরলরেখা টান; উহারা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল।

O হইতে AB এর উপর OL লম্ব টান। Oকে কেন্দ্র করিয়া OL ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক।

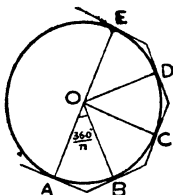
ইহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইল।

প্রমাণ। কারণ, BC, CD···ইত্যাদি বাহুগুলির উপর যথাক্রমে OM, ON···ইত্যাদি লম্ব টানিয়া দেখান যাইতে পারে যে, OL = OM = ON···(অনুশীলনী ২৮ উদা ১০ দেখ).

সুতরাং Oকে কেন্দ্র করিয়া OL ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত M, N··· ইত্যাদি বিন্দু দিয়া যাইবে।

আবার, L, M, N,···ইত্যাদি বিন্দুতে কোণ সমকোণ বলিয়া AB, BC, CD ইত্যাদি বাহুগুলি বৃত্তের স্পর্শক হইবে। (উপ ৩৬, অনু ১)

সম্পাদ্য ২৬

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম বহুভুজ (১) অন্তর্লিখিত অথবা (২) পরিলিখিত করিতে হইবে।

বিশ্লেষণ। মনে কর, AB, BC, CD······ O-কেন্দ্র বৃত্তে অন্তর্লিখিত সুষম বহুভুজের বাহু।

তাহা হইলে, AOB, BOC, COD···সমদ্বিবাহু ত্রিভুজগুলি পরস্পর সর্বসম। সুতরাং AOB, BOC, COD···ইত্যাদি কোণগুলি পরস্পর সমান এবং বহুভুজের বাহু সংখ্যা n হইলে, ইহাদের প্রত্যেক কোণ $= \frac{৩৬০^\circ}{n}$;

কারণ, ইহাদের সমষ্টি = ৪ সম ∠ বা ৩৬০°।

(১) অতএব, n বাহু বিশিষ্ট সুষম বহুভুজ বৃত্তে অন্তর্লিখিত করিতে হইলে, বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুতে $\frac{৩৬০^\circ}{n}$ এর সমান AOB কোণ আঁক। মনে কর, ঐ কোণের বাহু দুটি বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। AB সংযুক্ত কর এবং AB এর সমান BC, CD,···জ্যা বৃত্তে স্থাপন কর। তাহা হইলেই, ABCD · উদ্দিষ্ট সুষম বহুভুজ হইবে। কারণ, স্পষ্টই ইহা সমবাহু ও সদৃশকোণ হইবে অর্থাৎ সুষম হইবে।

(২) n বাহু বিশিষ্ট সুষম বহুভুজ বৃত্তে পরিলিখিত করিতে হইলে পূর্বের ন্যায় A, B, C, D,···বিন্দুগুলি নির্ণয় কর। ঐ বিন্দুগুলিতে বৃত্তের স্পর্শক আঁক, তাহা হইলেই উদ্দিষ্ট সুষম বহুভুজ উৎপন্ন হইবে। কারণ, দেখান যাইতে পারে যে, ঐ বহুভুজ সমবাহু এবং সদৃশকোণ অর্থাৎ সুষম।

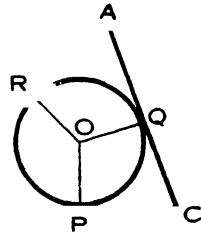
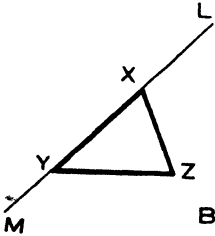
অনুশীলনী ২৮

১। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে, কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশকোণ হয় এরূপ একটি ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

মনে কর, ABC নির্দিষ্ট বৃত্তে, XYZ নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশকোণ করিয়া একটি ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন। বৃত্তের পরিধিস্থ A বিন্দুতে TAN স্পর্শক টান। $\angle NAC = \angle Y$ এবং $\angle TAB = \angle Z$ করিয়া যথাক্রমে AC ও AB জ্যা টান। BC সংযুক্ত কর। তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

২। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশকোণ হয় এরূপ একটি ত্রিভুজ পরিলিখিত করিতে হইবে।

মনে কর, ABC নির্দিষ্ট বৃত্তে XYZ নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশকোণ হয় এরূপ একটি ত্রিভুজ পরিলিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। XYকে উভয়দিকে L ও M পর্যন্ত বর্ধিত কর, বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুতে ZXL ও ZYM কোণের সমান করিয়া যথাক্রমে QOR ও ROP কোণ আঁক। OP, OQ OR যেন পরিধিকে যথাক্রমে P, Q ও R বিন্দুতে ছেদ করিল। P, Q ও R বিন্দুতে স্পর্শক টানিয়া ABC ত্রিভুজ উৎপন্ন কর। তাহা হইলে, ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

৩। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম ষড়ভুজ অন্তর্লিখিত কর।

[পরিধিস্থ কোন বিন্দু A হইতে ব্যাসার্ধের সমান AB, BC, CD, DE, EF জ্যা বৃত্তে স্থাপন কর ; AF সংযুক্ত করিলেই উদ্দিষ্ট ষড়ভুজ পাইবে।]

৪। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ABএর উপর একটি সুষম ষড়ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[A ও Bকে কেন্দ্র করিয়া একই AB ব্যাসার্ধ লইয়া দুটি বৃত্তচাপ আঁক; উহারা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। Oকে কেন্দ্র করিয়া ঐ একই ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। এখন ঐ বৃত্তে উদাহরণ ৩ এর ন্যায় কার্য করিয়া অন্তর্লিখিত ষড়ভুজই উদ্দিষ্ট ষড়ভুজ হইবে।]

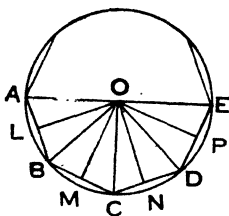
৫। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম অষ্টভুজ অন্তর্লিখিত কর।

৬। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম দশভুজ অন্তর্লিখিত কর।

৭। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম ষড়ভুজ পরিলিখিত কর।

৮। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম অষ্টভুজ পরিলিখিত কর।

৯। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর একটি সুষম অষ্টভুজ অঙ্কিত কর।

১০। সুষম বহুভুজের সকল কোণের দ্বিখণ্ডক এমন এক বিন্দুতে মিলিত হয়, যাহা উহার শীর্ষগুলি হইতে এবং বাহুগুলি হইতে, সমদূরবর্তী।

মনে কর ABCD…সুষম বহুভুজের কোনও দুইটি সন্নিহিত কোণের (মনে কর, A ও B কোণের) দ্বিখণ্ডক দুটি O বিন্দুতে মিলিত হইল। O এর সহিত C, D, E,… শীর্ষগুলি সংযুক্ত কর। এবং OL, OM, ON…ইত্যাদি যথাক্রমে AB, BC, CD… ইত্যাদি বাহুর উপর লম্ব টান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে OC, OD, OE…যথাক্রমে C, D, E…কোণের দ্বিখণ্ডক এবং (১) OA = OB = OC = …, (২) OL = OM = ON = … ।

প্রমাণ। OA = OB ; কারণ, ∠A = ∠B (সুষম বহুভুজের কোণ বলিয়া) এবং ∠OAB = ∠OBA, সমান সমান কোণের অর্ধেক বলিয়া।

এখন, OBC, OAB ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম দেখান যাইতে পারে। সুতরাং OC = OB এবং $\angle OCB = \angle OBA = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\angle C$.

অর্থাৎ, C কোণকে OC দ্বিখণ্ডিত করিল।

ঐরূপে দেখান যাইতে পারে যে OD, OE যথাক্রমে D, E,…… কোণকে দ্বিখণ্ডিত করিবে ; এবং OA = OB = OC = OD = OE……

আবার, OL = OM ; কারণ OB, ABC কোণের দ্বিখণ্ডক বলিয়া O, AB ও BC হইতে সমদূরবর্তী ; সেইরূপ OM = ON, ON = OP…

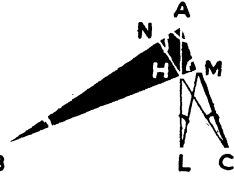
$\therefore$ OL = OM = ON = OP……

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

ত্রিভুজ ও বৃত্ত সম্বন্ধে বিবিধ প্রতিজ্ঞা

ত্রিভুজের লম্ববিন্দু

১। ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্ব তিনটি একই বিন্দুতে মিলিত হইবে।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজের A ও B বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর যথাক্রমে AL ও BM লম্ব দুইটি H বিন্দুতে মিলিত হইল।

CH সংযুক্ত কর; বর্ধিত CH যেন ABকে N বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে CN, AB এর লম্ব।

প্রমাণ। LM সংযুক্ত কর।

এখন, যেহেতু $\angle HLC + \angle HMC =$ ২ সম $\angle$.

$\therefore$ C, L, H, M একই পরিধিস্থ। (উপ ৪২)

$\therefore$ $\angle CML = \angle CHL$; একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া,

$= NHA$ বিপ্রতীপ কোণ

আবার, $\angle ALB = \angle AMB$; সমকোণ বলিয়া,

$\therefore$ A, B, L, M, একই পরিধিস্থ। (উপ ৪০, বিপরীত)

$\therefore$ $\angle LMB = \angle LAB$; একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া,

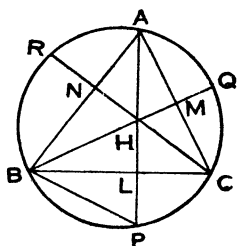
$\therefore$ $\angle NHA + \angle HAN = \angle CML + \angle LMB =$ এক সম $\angle$

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ANH =$ ১ সম $\angle$

অর্থাৎ CN, ABএর লম্ব।

দ্রষ্টব্য। অন্য প্রকার প্রমাণের জন্য ১৬৫ পৃষ্ঠায় উদাহরণ ৩ দেখ।

মন্তব্য। Hকে ABC ত্রিভুজের **লম্ববিন্দু** (orthocentre) বলে। (১৬৬ পৃষ্ঠা দেখ)।

২। ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইতে যে কোন বাহুর উপর পাতিত লম্ব পরিবৃত্তের পরিধি পর্যন্ত বর্ধিত হইলে ঐ লম্ব ঐ বাহু দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর AL, BM, CN লম্ব এবং H লম্ববিন্দু ; HL, HM, HN বর্ধিত হইয়া পরিবৃত্তকে যথাক্রমে P, Q, R বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

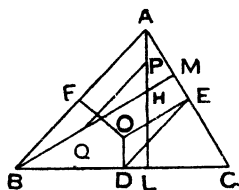
HL = LP, HM = MQ, এবং HN = NR.

প্রমাণ। BP সংযুক্ত কর। এখন, HBL, PBL ত্রিভুজের মধ্যে,

∵ { ∠BHL = LHM কোণের সম্পূরক,
= ∠LCM, কারণ C, L, H, M একই পরিধিস্থ ;
= ∠BPL, একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া ;
∠BLH = ∠BLP, সমকোণ বলিয়া,
এবং BL বাহু সাধারণ

অতএব ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম ; ∴ HL = PL.
এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, HM = MQ, HN = RN.

৩। ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইতে কোন শীর্ষের দূরত্ব, পরিকেন্দ্র হইতে বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ হইবে।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং H লম্ববিন্দু। আরও মনে কর, OD BCএর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AH = 2OD.

অঙ্কন। মনে কর P, Q যথাক্রমে AH ও BHএর মধ্যবিন্দু, PQ, DE সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। P, Q যথাক্রমে AH ও BHএর মধ্যবিন্দু বলিয়া ;

PQ ABএর সমান্তরাল এবং ABএর অর্ধেক।

সেইরূপ, DE ABএর সমান্তরাল এবং ABএর অর্ধেক।

∴ PQ, DEএর সমান ও সমান্তরাল।

আবার, AL, BM ও PQ যথাক্রমে OD, OE এবং DEএর সমান্তরাল বলিয়া ; $\angle HPQ = \angle ODE$, $\angle PQH = \angle DEO$.

এখন HPQ, ODE ত্রিভুজ ছুটি সর্বসম দেখান যাইতে পারে।

সুতরাং $HP = OD$

কিন্তু $AH = 2HP$ ∴ $AH = 2OD$.

পাদত্রিভুজ

সংজ্ঞা। ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্বের পাদবিন্দু তিনটিকে সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহাকে মূল ত্রিভুজের **পাদত্রিভুজ** (pedal triangle) বলে।

৪। সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের যে কোনও শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্ব পাদত্রিভুজের যে কোণ দিয়া যায় তাহাকে দ্বিখণ্ডিত করে।

মনে কর, ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হইতে বিপরীত বাহুর উপর AL, BM ও CN লম্ব ; সুতরাং LMN উহার পাদত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

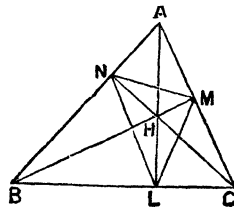
(১) AL NLMকোণকে,

(২) BM LMNকোণকে এবং

(৩) CN MNLকোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ। মনে কর H লম্ববিন্দু। এখন C, H, L, M এক পরিধিস্থ বলিয়া $\angle HLM = \angle HCM = \angle BAC$এর পূরক।

সেইরূপ, B, L, H, N, এক পরিধিস্থ বলিয়া

$\angle HLN = \angle HBN = \angle BAC$এর পূরক।

∴ ∠HLM = ∠HLN ; অর্থাৎ AL, NLM কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, BM LMN কোণকে এবং CN MNL কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

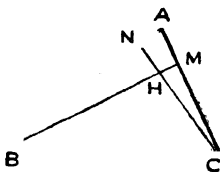
অনু। পাদত্রিভুজের যে কোন দুই বাহু, মূল ত্রিভুজের যে বাহুর সহিত মিলিত হয়, সেই বাহুর সহিত পরস্পর সমান কোণ উৎপন্ন করে।

কারণ, ∠MLC = ALM কোণের পূরক

= ALN কোণের পূরক = ∠NLB.

দ্রষ্টব্য। এই প্রতিজ্ঞায় ত্রিভুজের এক কোণ স্থূলকোণ হইলে, উহার অন্য দুই কোণ হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্ব পাদত্রিভুজের অনুরূপ কোণদ্বয়ের বহির্দ্বিখণ্ডক হইবে।

সঞ্চারপথ

৫। ত্রিভুজের ভূমি এবং শিরঃকোণ নির্দিষ্ট আছে, উহার লম্ববিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজের ভূমি BC এবং শিরঃকোণ A নির্দিষ্ট আছে। আরও মনে কর, B ও C হইতে যথাক্রমে BM ও CN বিপরীত বাহুর উপর লম্ব, এবং H উহাদের ছেদবিন্দু, সুতরাং H ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ; ইহার সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

∠ANH ও ∠AMHএর প্রত্যেকে সমকোণ বলিয়া,

A, N, H, M একই পরিধিস্থ।

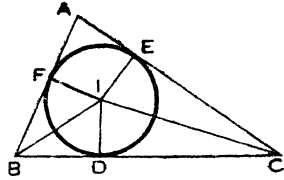
∴ ∠MHN = 180° − ∠A, কিন্তু ∠BHC = ∠MHN.

∴ ∠BHC = 180° − ∠A, এবং ইহার পরিমাণ নিয়তই এক।

∴ Hএর সঞ্চারপথ এমন একটি বৃত্তাংশ, যাহার জ্যা BC.

৬। ত্রিভুজের ভূমি এবং শিরঃকোণ নির্দিষ্ট আছে, উহার অন্তঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজের ভূমি BC এবং শিরঃকোণ Aএর পরিমাণ নিদিষ্ট আছে।

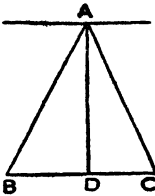
আরও মনে কর, I, DEF এই অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র; ইহার সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

IB, IC সংযুক্ত কর। I ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া, IB ও IC যথাক্রমে $\angle B$ ও $\angle C$কে দ্বিখণ্ডিত করে।

$$\therefore \quad \angle BIC = 180^\circ - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = A + B + C - \frac{B}{2} - \frac{C}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ (A + B + C) + \frac{A}{2} = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

$\therefore$ $\angle BIC$এর পরিমাণ নিয়তই এক।

অতএব, I এর সঞ্চারপথ এমন একটি বৃত্তাংশ যাহার জ্যা BC.

৭। ত্রিভুজের ভূমি এবং ক্ষেত্রফল নির্দিষ্ট আছে, উহার শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজের BC ভূমি এবং ক্ষেত্রফলের পরিমাণ নিদিষ্ট আছে; ইহার শীর্ষ A এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

BC এর উপর AD লম্ব টান।

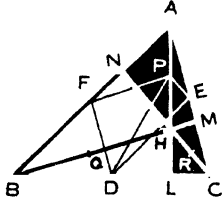
এখন, $\frac{1}{2}$ BC. AD $= \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল, সুতরাং ইহার পরিমাণ নিয়তই এক।

কিন্তু BCএর পরিমাণও নির্দিষ্ট আছে; অতএব AD এর পরিমাণ নিয়ত একই হইবে।

$\therefore$ A এর সঞ্চারপথ BC হইতে নির্দিষ্ট দূরে উহার উভয় পার্শ্বে অবস্থিত এবং উহার সহিত সমান্তরাল দুটি সরলরেখা।

নববিন্দুবৃত্ত

৮। কোন ত্রিভুজের বাহুর মধ্যবিন্দু তিনটি, শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর লম্বের পাদবিন্দু তিনটি এবং লম্ববিন্দুর সহিত শীর্ষত্রয় সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দু তিনটি এক পরিধিস্থ হইবে।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু; L, M, N শীর্ষত্রয় হইতে বিপরীত বাহুর লম্বের পাদবিন্দু, H লম্ববিন্দু এবং P, Q, R যথাক্রমে AH, BH ও CHএর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে D, E, F, L, M, N, P, Q, R এই নয়টি বিন্দু একই পরিধিস্থ হইবে।

প্রথম প্রমাণ। PD, PE, PF, DE, DF সংযুক্ত কর।

এখন, PE CHএর সমান্তরাল; কারণ, P ও E যথাক্রমে AH ও ACএর মধ্যবিন্দু।

সেইরূপ, DE ABএর সমান্তরাল;

∴ ∠PED = CH ও ABএর অন্তর্ভূত কোণ

= ∠CNA = এক সমকোণ।

সেইরূপ, ∠PFD = এক সমকোণ।

∴ D, E, P, F একই পরিধিস্থ। অর্থাৎ D, E, F, দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত P দিয়া যাইবে।

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে D, E, F দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত Q ও R দিয়াও যাইবে।

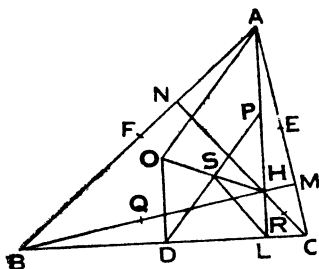
আবার, PED ও PLD কোণের প্রত্যেকে সমকোণ বলিয়া,

P, E, D দিয়া অঙ্কিত বৃত্তের পরিধিতে L পড়িবে;

অর্থাৎ D, E, F, P, Q, R দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত L দিয়া যাইবে।

এইপ্রকারে দেখান যাইতে পারে যে, ঐ বৃত্ত M ও N দিয়াও যাইবে।

∴ D, E, F, P, Q, R, L, M, N, বিন্দু নয়টি একই পরিধিস্থ।

দ্রষ্টব্য। এই বৃত্তকে ABC ত্রিভুজের **নববিন্দুবৃত্ত** (nine-point circle) বলা হয়।

দ্বিতীয় প্রমাণ। আরও মনে কর, O পরিকেন্দ্র; OA, OD, OH, DP এবং SL সংযুক্ত কর। [S, OH ও DPএর ছেদবিন্দু।]

এখন AP ODএর সমান ও সমান্তরাল বলিয়া,

DP = OA = পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$ (মনে কর)

কিন্তু SPH, SDO ত্রিভুজের মধ্যে

$\because$ { ∠PSH = বিপ্রতীপ ∠DSO,
∠HPS = একান্তর ∠ODS,
এবং HP বাহু = অনুরূপ OD বাহু।

$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ; সুতরাং OS = HS

এবং SP = SD = $\frac{1}{2}$DP = $\frac{1}{2}r$.

আবার, SL = $\frac{1}{2}$DP = $\frac{1}{2}r$

সুতরাং SD = SL = SP = $\frac{1}{2}r$

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে,

SE = SM = SQ = $\frac{1}{2}r$

এবং SF = SN = SR = $\frac{1}{2}r$.

সুতরাং D, E, F, L, M, N, P, Q, R একই পরিধিস্থ কারণ, উহারা Sকে কেন্দ্র করিয়া $\frac{1}{2}r$ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তের পরিধিতে পড়িবে।

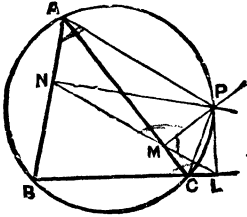
মন্তব্য। PD, QE, RF সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু হইবে।

কারণ, ∠PLD, ∠QME ও ∠RNFএর প্রত্যেকে সমকোণ বলিয়া PD, QE ও RF এর প্রত্যেকেই নববিন্দুবৃত্তের ব্যাস।

অনু ১। কোন ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তের কেন্দ্র উহার লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দু হইবে।

অনু ২। ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ উহার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

পাদরেখা

৯। ত্রিভুজের পরিবৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দু হইতে উহার বাহুত্রয়ের উপর পাতিত লম্বের পাদবিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের পরিধিস্থ P বিন্দু হইতে PL, PM ও PN যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে L, M ও N বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

প্রমাণ। ML, MN, PA, PC সংযুক্ত কর।

এখন PLC ও PMC কোণের প্রত্যেকে সমকোণ বলিয়া,

P, L, C, M বিন্দুগুলি এক পরিধিস্থ।

∴ ∠PML = একই বৃত্তাংশস্থ ∠PCL

= PCB কোণের সম্পূরক = ∠PAN.

আবার, PMA ও PNA কোণের উভয়ে সমকোণ বলিয়া,

P, M, N, A বিন্দুগুলি এক পরিধিস্থ।

∴ ∠PMN = PAN কোণের সম্পূরক ;

= PML কোণের সম্পূরক ; কারণ, ∠PAN = ∠PML.

∴ LM ও MN একই সরলরেখায় অবস্থিত।

মন্তব্য। LMN সরলরেখাকে ABC ত্রিভুজের সহিত P বিন্দুর **পাদরেখা** (Pedal line বা Simson's line) বলা হয়।

অনুশীলনী ২৯

১। ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু H হইলে, দেখাও যে BHC, BAC কোণ দুটি পরস্পর সম্পূরক।

২। H, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইলে, H, A, B, C এই চারিটি বিন্দুর যে কোনটি অপর তিন বিন্দু শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইবে।

৩। সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয় পাদত্রিভুজের কোণ সমূহের বহির্দ্বিখণ্ডক হইবে।

৪। স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয় উহাদের সংলগ্ন পাদত্রিভুজের কোণদ্বয়ের অন্তর্দ্বিখণ্ডক হইবে।

৫। কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABC একটি ত্রিভুজ। বৃত্তের পরিধির কোন বিন্দু P হইতে PL, PM যথাক্রমে BC ও CA এর উপর লম্ব; যদি LM বা বর্ধিত LM ABকে N বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, PN ABএর লম্ব হইবে।

৬। প্রমাণ কর যে, H লম্ববিন্দু বিশিষ্ট ABC ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্ত, AHB, BHC, CHA ত্রিভুজের প্রত্যেকেরও নববিন্দুবৃত্ত হইবে।

৭। যে সকল ত্রিভুজের একই লম্ববিন্দু এবং একই পরিবৃত্ত তাহাদের একই নববিন্দুবৃত্ত হইবে।

৮। ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট থাকিলে, দেখাও যে, উহার নববিন্দুবৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ এমন একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্র নির্দিষ্ট ভূমির মধ্যবিন্দু।

৯। ত্রিভুজের যে কোন শীর্ষের সহিত উহার লম্ববিন্দু সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দু হইতে ঐ শীর্ষগামী মধ্যমার উপর পাতিত লম্বের পাদবিন্দু নববিন্দুবৃত্তের উপর থাকিবে।

১০। একটি বৃত্তে একটি সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত হইলে, পরিধির যে কোন বিন্দুর পাদরেখা এবং ঐ বিন্দুর সহিত ত্রিভুজের লম্ববিন্দু সংযোজক সরলরেখার অবচ্ছেদ বিন্দু নববিন্দুবৃত্তের উপর পড়িবে।

১১। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট থাকিলে, উহার পাদত্রিভুজের পরিবৃত্তের আয়তন নিয়তই এক হইবে।

১২। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট থাকিলে, উহার পাদত্রিভুজের এক বাহু এবং এক কোণ ধ্রুবক (constant) হইবে।

১৩। কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর সহিত উহার পরিবৃত্তের কোনও বিন্দু সংযোজক সরলরেখা ঐ বিন্দুর পাদরেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

১৪। কোন ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র, পরিকেন্দ্র, নববিন্দুবৃত্তের কেন্দ্র এবং লম্ববিন্দু, ইহারা একরেখীয় হইবে।

বৃত্তের পরিধি ও ক্ষেত্রফল

উদা ১। একটি পয়সার পরিধির উপর একখণ্ড সুতো টান করিয়া একবার জড়াও। যতটুক সুতো পয়সাটির পরিধির সহিত লাগিয়া রহিয়াছে, তাহার দৈর্ঘ্য মাপ। ইহাই পয়সাটির পরিধির দৈর্ঘ্য।

উদা ২। তোমার পেন্সিলে একখণ্ড সুতো ঠিক পাঁচ বার জড়াও। কতটুক সুতো জড়ান হইল? ইহার দৈর্ঘ্যকে ৫ দিয়া ভাগ করিলে একবার জড়াইতে যত সুতো লাগিবে তাহার দৈর্ঘ্য পাওয়া যাইবে। ইহাই পেন্সিলের বৃত্তাকার প্রান্তের পরিধি। এই পরিধির দৈর্ঘ্য কত?

উদা ৩। একটি গোলাকার নলের চারিদিকে কাগজ জড়াও; একটি আলপিন দিয়া ঐ কাগজে ছিদ্র কর। এখন কাগজখানি খোল। সন্নিহিত দুই দুইটি ছিদ্রের দূরত্ব কত? ইহাই নলটির এক প্রান্তের পরিধির দৈর্ঘ্য।

উদা ৪। একটি পয়সার পরিধির উপর একটি দাগ দাও। একটি সরলরেখা আঁকিয়া উহার উপর দিয়া পয়সাটি সাবধানে গড়াইয়া লইয়া যাও এবং রেখাটির যে যে বিন্দুতে ঐ দাগটি আসিয়া পড়ে সেই বিন্দুগুলি চিহ্নিত কর। এই বিন্দুগুলির সন্নিহিত যে কোনও দুইটির দূরত্বই পয়সাটির পরিধির দৈর্ঘ্য।

উদা ৫। আধ ইঞ্চি ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। পরে উহার পরিধি স্থির কর। পরিধির দৈর্ঘ্য মনে রাখিও।

উদা ৬। বিভিন্ন ব্যাস-বিশিষ্ট পাঁচটি বৃত্ত আঁকিয়া উহাদের পরিধির দৈর্ঘ্য স্থির কর। প্রত্যেক বৃত্তের পরিধিকে উহার ব্যাস দিয়া ভাগ কর। ভাগফল কত?

প্রত্যেক স্থলেই ভাগফল একই হইল কি? যদি আঁকিতে ও মাপিতে ভুল না করিয়া থাক তবে প্রত্যেক স্থলেই ঐ ভাগফল $৩\frac{১}{৭}$ বা ৩·১৪১৬ **প্রায়** হইবে। সাধারণত ঐ ভাগফল π (pi) এই চিহ্ন দ্বারা নির্দেশ করা হয়। সুতরাং $\pi = \frac{22}{7}$ বা 3·1416 প্রায়; এবং

বৃত্তের পরিধি $= \pi \times$ (বৃত্তের ব্যাস)

বৃত্তের ক্ষেত্রফল—মনে কর PQRS···একটি বহুভুজ কোন বৃত্তে পরিলিখিত হইল। আরও মনে কর O বৃত্তের কেন্দ্র এবং r উহার ব্যাসার্ধ।

Oএর সহিত P, Q, R, S······এবং B, C, D, E······স্পর্শবিন্দুগুলি

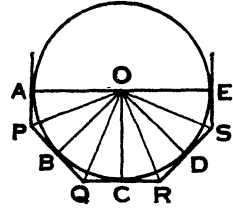
সংযুক্ত কর। তাহা হইলে OB, OC, OD···যথাক্রমে PQ, QR, RS···এর উপর লম্ব এবং OB = OC = OD = ······ = r.

এখন, PQRS······বহুভুজের ক্ষেত্রফল

= POQ, QOR, ROS,······ত্রিভুজ-সমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি ;

$= \frac{1}{2}r\,PQ + \frac{1}{2}r\,QR + \frac{1}{2}r\,RS + \cdots\cdots$

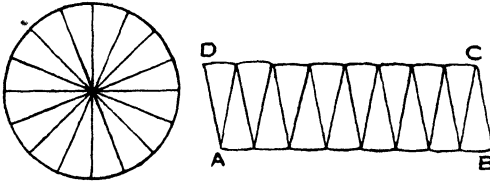
$= \frac{1}{2}r \times (PQ + QR + RS + \cdots)$

$= \frac{1}{2}r \times$ (বহুভুজের পরিসীমা) ;

এবং ইহা বহুভুজের যে কোনও সংখ্যক বাহুর জন্যই খাটিবে।

কিন্তু বহুভুজের বাহুসংখ্যা যত অধিক হইবে উহার পরিসীমা ততই বৃত্তের পরিধির নিকটবর্তী হইবে এবং পরিণামে যখন বহুভুজের বাহুসংখ্যা অসীম হইবে তখন উহার পরিসীমা ও বৃত্তের পরিধি সমান হইবে এবং ঐ ক্ষেত্রে বহুভুজের ক্ষেত্রফল বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান হইবে। সুতরাং

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}r \times$ (পরিধি).

$= \frac{1}{2}r \times 2\pi r = \pi r^2.$

অন্যপ্রকার। একটি বৃত্তকে যুগ্ম সংখ্যক সমান কোণবিশিষ্ট বৃত্তকলায় বিভক্ত কর ; এবং নিম্নপ্রদর্শিত রূপে বৃত্তকলাগুলি সাজাও।

এখন বৃত্তের ক্ষেত্রফল = ABCDএর ক্ষেত্রফল।

কিন্তু ঐ বৃত্তকলাগুলির সংখ্যা অসংখ্য বাড়াইয়া দিলে AB, CD রেখা দুইটি সরল হইবে এবং A ও C বিন্দুতে কোণের প্রত্যেকে সমকোণ হইবে। সুতরাং পরিণামে ABCD একটি আয়তক্ষেত্র হইবে এবং উহার দৈর্ঘ্য অর্ধপরিধির সমান এবং প্রস্থ ব্যাসার্ধের সমান হইবে।

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = অর্ধপরিধি $\times$ ব্যাসার্ধ

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2.$

বিবিধ অনুশীলনী ৩

১। বৃত্তের দুটি সমান জ্যা পরস্পর ছেদ করিলে, একের খণ্ডদ্বয় যথাক্রমে অন্যের খণ্ডদ্বয়ের সমান হইবে।

২। বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু দিয়া অঙ্কিত জ্যাসমূহের মধ্যে উক্ত বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত জ্যাই ক্ষুদ্রতম হইবে।

৩। বৃত্তের যে জ্যাএর মধ্যবিন্দু একটি নির্দিষ্ট জ্যাএর উপর পড়ে তাহা উক্ত নির্দিষ্ট জ্যা অপেক্ষা ছোট হইবে।

৪। পরস্পর ছেদিত দুই বৃত্তের কোনও ছেদবিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের সম্পূরক।

৫। কোন বৃত্তে অন্তলিখিত ABCD চতুর্ভুজের B কোণের দ্বিখণ্ডক বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিল, CD বাহু F পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, প্রমাণ কর যে, DE ADF কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

৬। একটি বৃত্তে পরিলিখিত কোন চতুর্ভুজের দুই বাহু সমান্তরাল হইলে দেখাও যে, অবশিষ্ট বাহুর প্রত্যেকে কেন্দ্রে এক সমকোণের সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিবে।

৭। দুটি পরস্পর ছেদিত বৃত্তের কোন ছেদবিন্দু P দিয়া উভয় পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত APB একটি সরলরেখা ; দেখাও যে, A ও B বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ P বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের সমান।

৮। দুটি পরস্পর ছেদিত বৃত্তের ছেদবিন্দু P ও Q দিয়া উভয় পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত APB ও CQD দুইটি সরলরেখা PQ জ্যাএর সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিলে, দেখাও যে, AB = CD.

৯। A ও B কে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত দুটি বৃত্ত P বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করিল ; AQ ও BR একই দিকে প্রসারিত উহাদের দুটি ব্যাসার্ধ হইলে, প্রমাণ কর যে, P, Q ও R একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

১০। উক্ত উদাহরণে P বিন্দুতে বৃত্ত দুটি বহিঃস্পর্শ করিলে এবং AQ ও BR পরস্পর বিপরীত দিকে প্রসারিত দুটি ব্যাসার্ধ হইলে, দেখাও যে, P, Q ও R একরেখীয়।

১১। সুষম পঞ্চভুজের যে কোন কোণ উহার সহিত বিপরীত শীর্ষ সংযোজক সরলরেখাদ্বয় দ্বারা ত্রিখণ্ডিত হইবে।

১২। কোন বৃত্তের কেন্দ্র O এবং PN উহার পরিধিস্থ কোনও বিন্দু

P হইতে একটি নির্দিষ্ট ব্যাসের উপর লম্ব হইলে, দেখাও যে, OPN কোণের দ্বিখণ্ডক দুই নির্দিষ্ট বিন্দুর কোন একটি দিয়া যাইবে।

১৩। পরস্পর বহিঃস্পর্শ করে এরূপ দুই বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় নির্দিষ্ট থাকিলে, প্রমাণ কর যে, তাহাদের সাধারণ স্পর্শক একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এবং কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক রেখা ঐ নির্দিষ্ট বৃত্তের ব্যাস হইবে।

১৪। পরস্পর ছেদিত দুটি বৃত্তের ছেদবিন্দু P ও Q দিয়া অঙ্কিত দুটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে এবং অন্যটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, AB ও CD সমান্তরাল।

১৫। দুটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিলে এবং উহাদের AC ও AD স্পর্শক পরিধিদ্বয়ের সহিত যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে, ABC, DBA ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ হইবে।

১৬। দুটি বৃত্ত পরস্পর সমকোণে ছেদ করিলে উহাদের কোনও সাধারণ বিন্দুতে একের স্পর্শক অন্যের কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

[দুটি বৃত্তের কোন ছেদবিন্দুতে স্পর্শক দুটি পরস্পর লম্ব হইলে, বৃত্ত দুটি সমকোণে ছেদ করিল (cut orthogonally) বলা হয় ; এবং ঐ বৃত্ত দুটিকে **সমকোণীয় বৃত্ত** (orthogonal circles) বলা হয়।]

১৭। যে বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে লম্বভাবে ছেদ করে, তাহা অন্য একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে।

১৮। কোন বৃত্তে একটি সমবাহু ত্রিভুজ ও একটি সুষম ষড়ভুজ অন্তর্লিখিত হইলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ষড়ভুজের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

১৯। ABCDE একটি সুষম পঞ্চভুজ এবং AC ও BEএর ছেদবিন্দু H হইলে, প্রমাণ কর যে, (১) AB = CH = EH (২) AC = AB + BH এবং (৩) AB BHCত্রিভুজের পরিবৃত্তের স্পর্শক হইবে।

২০। নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় থাকিবে এবং যাহা অন্য একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে।

২১। কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু তিনটি নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২২। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও অন্তঃকেন্দ্র নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২৩। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও একটি বহিঃকেন্দ্র নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২৪। ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ এবং নিম্নলিখিত যে কোন একটি নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। (১) শিরঃকোণ দ্বিখণ্ডকের সহিত ভূমির ছেদবিন্দু; (২) ভূমির এক প্রান্তবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্বের দৈর্ঘ্য; (৩) ভূমির কোন প্রান্তবিন্দুগামী মধ্যমার দৈর্ঘ্য; (৪) ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর।

২৫। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণ, অন্তঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর পাতিত লম্বের পরিমাণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২৬। ত্রিভুজের শীর্ষ, পরিকেন্দ্র এবং কোন এক বাহুর মধ্যবিন্দু নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২৭। ত্রিভুজের শীর্ষ, পরিকেন্দ্র এবং অন্তঃকেন্দ্র নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২৮। ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট আছে, উহার ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২৯। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোন বৃত্তের জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩০। ত্রিভুজের মধ্যে এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যেন ঐ বিন্দুতে বাহুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন সম্মুখকোণ তিনটি পরস্পর সমান হয়।

৩১। নিদিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা তুটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে, কখন ইহা অসম্ভব হইবে?

৩২। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং একটি নিদিষ্ট বৃত্তকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

৩৩। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহার কেন্দ্র কোন নির্দিষ্ট সরলরেখায় থাকিবে এবং (১) যাহা তুটি নির্দিষ্ট সমান বৃত্তকে স্পর্শ করিবে; (২) যাহা অন্য তুটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে।

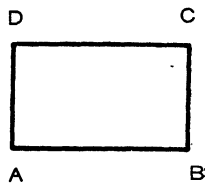
৩৪। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা একটি নিদিষ্ট সরলরেখা এবং তুটি নির্দিষ্ট সমান বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

৩৫। বৃত্তের কোন নিদিষ্ট বৃত্তকলাতে একটি বৃত্ত অন্তলিখিত কর।

চতুর্থ ভাগ

প্রথম অধ্যায়

বীজগণিতের কতিপয় সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা

তোমরা দেখিয়াছ যে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্রকে উহার দুই সন্নিহিত বাহু AB ও ADএর **অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র** বলিয়া নির্দেশ করা হয়; কারণ, ঐ দুই বাহু দ্বারা উহার আকৃতি ও আয়তন নির্দিষ্ট হইয়া থাকে।

কোন আয়তক্ষেত্রের দুই সন্নিহিত বাহু AB ও AD হইলে উহাকে সংক্ষেপে **আয়ত** AB. AD বা শুধু AB.AD বলা হয়।

সেইরূপ, কোন সরলরেখা ABএর উপরিস্থ (বা উপর অঙ্কিত) বর্গক্ষেত্রকে সংক্ষেপে ABএর **বর্গক্ষেত্র** বা শুধু AB^2 বলা হয়।

সংজ্ঞা। যদি কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা AB অথবা বর্ধিত ABএর উপর কোন বিন্দু P লওয়া যায়, তবে উভয় স্থলেই AP ও PBকে AB সরলরেখার **খণ্ড** (Segments) বলা হয়।

প্রথম চিত্র দ্বিতীয় চিত্র

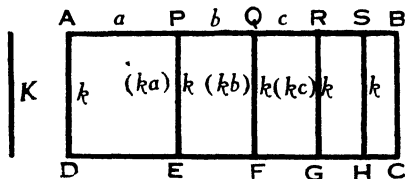
প্রথম চিত্রে P A ও Bএর মধ্যে অবস্থিত বলিয়া, AB সরলরেখা P বিন্দুতে **অন্তর্বিভক্ত** (divided internally) হইল এবং দ্বিতীয় চিত্রে P A ও Bএর বাহিরে আছে বলিয়া, AB সরলরেখা P বিন্দুতে **বহির্বিভক্ত** (divided externally) হইল বলা হয়।

দ্রষ্টব্য। উপরের চিত্র দুটি হইতে দেখা যায় যে, AB সরলরেখা P বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইলে AB উহার AP ও PB দুই খণ্ডের সমষ্টির সমান হইবে কিন্তু বহির্বিভক্ত হইলে উহা AP ও PB এই দুই খণ্ডের অন্তরের সমান হইবে। আরও দেখা যায় যে, P বিন্দুতে AB অন্তর্বিভক্ত হইলে উহার AP ও PB খণ্ড সমান বা অসমান দুই হইতে পারে কিন্তু বহির্বিভক্ত হইলে খণ্ড দুটি সর্বদাই অসমান হইবে।

উপপাদ্য ৪৪

$k(a+b+c+\cdots)=ka+kb+kc+\cdots$ বীজগণিতের **এই সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করিতে হইবে।**

অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞাটি এই :

যদি দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখার একটি কতিপয় খণ্ডে বিভক্ত হয়, তবে ঐ দুই সরলরেখার অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, অবিভক্ত রেখা ও বিভক্ত রেখার প্রত্যেক খণ্ডের অন্তর্গত যে যে আয়তক্ষেত্র হয় তাহাদের সমষ্টির সমান হইবে।

মনে কর, AB এবং K দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্যে AB রেখা AP, PQ, QR⋯খণ্ডে বিভক্ত হইল। আরও মনে কর Kএর দৈর্ঘ্য k একক এবং AP, PQ, QR, ... এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c,⋯⋯একক।

অতএব, ABএর দৈর্ঘ্য $(a+b+c+\cdots\cdots)$ একক।

ABCD আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

P, Q, R,⋯⋯বিন্দু দিয়া যথাক্রমে PE, QF, RG.⋯⋯সরলরেখা ADএর সমান্তরাল করিয়া টান।

এখন, AC ক্ষেত্র = AE ক্ষেত্র + PF ক্ষেত্র + QG ক্ষেত্র + ⋯⋯

কিন্তু অঙ্কন অনুযায়ী,

AC ক্ষেত্র = আয়ত K.AB এবং ইহার কালি $k(a+b+c+\cdots\cdots)$ বর্গ একক;

AE ক্ষেত্র = আয়ত K.AP, ইহার কালি ka বর্গ একক,

PF ক্ষেত্র = আয়ত K.PQ, " " kb " "

QG ক্ষেত্র = আয়ত K.QR, " " kc " "

... ...

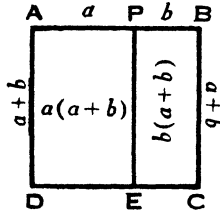
∴ আয়ত K.AB = আয়ত K.AP + আয়ত K.PQ + আয়ত K.QR + ⋯

অর্থাৎ, $k(a+b+c+\cdots) = ka + kb + kc + \cdots$

উপপাদ্য ৪৫

$(a+b)^2 = a(a+b)+b(a+b)$ বীজগণিতের এই সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করিতে হইবে।

অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞাটি এই ঃ

যদি একটি সরলরেখা যে কোন দুই খণ্ডে বিভক্ত হয়, তবে সমস্ত রেখার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র, সমস্ত রেখা ও উহার প্রত্যেক খণ্ডের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র দুটির সমষ্টির সমান হইবে।

মনে কর, AB একটি সরলরেখা ; ইহা যেন AP ও PB এই দুই খণ্ডে বিভক্ত হইল। আরও মনে কর, AP ও PBএর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a ও b একক ; অতএব ABএর দৈর্ঘ্য $(a+b)$ একক।

ABএর উপর ABCD বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। P হইতে AD বা BC এর সমান্তরাল PE সরলরেখা টান, ইহা যেন CDকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, AC ক্ষেত্র = AE ক্ষেত্র + PC ক্ষেত্র।

কিন্তু অঙ্কন অনুযায়ী,

AC ক্ষেত্র = ABএর বর্গক্ষেত্র এবং ইহার কালি $(a+b)^2$ বর্গ একক ;

AE ক্ষেত্র = আয়ত AD.AP

= আয়ত AB.AP ; ইহার কালি $a(a+b)$ বর্গ একক ;

PC ক্ষেত্র = আয়ত BC.PB

= আয়ত AB.PB ; „ „ $b(a+b)$ „ „

∴ ABএর বর্গক্ষেত্র = আয়ত AB.AP + আয়ত AB.PB.

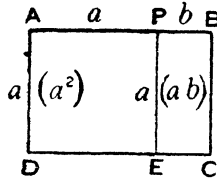
অর্থাৎ $(a+b)^2 = a(a+b) + b(a+b)$

উপপাদ্য ৪৬

$a(a+b)=a^2+ab$ বীজগণিতের

এই সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করিতে হইবে।

অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞাটি এই :

যদি একটি সরলরেখা যে কোন দুই খণ্ডে বিভক্ত হয়, তবে সমস্ত রেখা ও উহার কোন এক খণ্ডের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, ঐ খণ্ডের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র এবং উভয় খণ্ডের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হইবে।

মনে কর, AB একটি সরলরেখা; ইহা AP ও PB এই দুই খণ্ডে বিভক্ত হইল। আরও মনে কর, AP ও PB এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a ও b একক।

অতএব AB এর দৈর্ঘ্য $(a+b)$ একক।

AB এর উপর AD লম্ব টান ; AD যেন AP এর সমান হয়।

এখন, ABCD আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

P বিন্দু হইতে AD বা BC এর সমান্তরাল PE টান, PE যেন CD কে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, AC ক্ষেত্র = AE ক্ষেত্র + PC ক্ষেত্র

কিন্তু অঙ্কন অনুযায়ী,

AC ক্ষেত্র = আয়ত AD. AB

= আয়ত AP. AB এবং ইহার কালি $a(a+b)$ বর্গ একক ;

AE ক্ষেত্র = আয়ত AD. AP

= AP এর বর্গক্ষেত্র, এবং ইহার কালি a^2 " "

এবং PC ক্ষেত্র = আয়ত BC. PB

= আয়ত AP. PB এবং ইহার কালি ab " "

∴ আয়ত AP. AB = AP এর বর্গক্ষেত্র + আয়ত AP. PB

অর্থাৎ, $a(a+b)= a^2 + ab.$

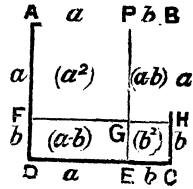
উপপাদ্য ৪৭

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ বীজগণিতের এই সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করিতে হইবে।

অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞাটি এই ঃ

যদি একটি সরলরেখা দুই খণ্ডে অন্তর্বিভক্ত হয়, তবে সমস্ত রেখার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র উহার দুই খণ্ডের উপরিস্থ দুই বর্গক্ষেত্র এবং খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ এর সমষ্টির সমান হইবে।

মনে কর, AB একটি সরলরেখা; ইহা P বিন্দুতে AP, PB এই দুই খণ্ডে অন্তর্বিভক্ত হইল। আরও মনে কর, AP এর দৈর্ঘ্য a একক এবং PB এর দৈর্ঘ্য b একক। অতএব AB এর দৈর্ঘ্য $(a+b)$ একক।

AB এর উপর ABCD বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। P হইতে AD অথবা BCএর সমান্তরাল PE টান, ইহা যেন CDকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। AD হইতে AF = AP অংশ কাট; তাহা হইলে FD = PB = b হইল।

F হইতে AB এর সমান্তরাল করিয়া FGH টান, ইহা যেন PEকে G বিন্দুতে এবং BCকে H বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, AC ক্ষেত্র = AG ক্ষেত্র + GC ক্ষেত্র + PH ক্ষেত্র + FE ক্ষেত্র।

কিন্তু অঙ্কন অনুযায়ী,

AC ক্ষেত্র = AB এর বর্গক্ষেত্র, এবং ইহার কালি $(a+b)^2$ বর্গ একক

AG ক্ষেত্র = AP এর বর্গক্ষেত্র „ „ a^2 „ „

GC ক্ষেত্র = PB এর বর্গক্ষেত্র „ „ b^2 „ „

PH ক্ষেত্র = আয়ত GP. PB

= আয়ত AP. PB. „ „ ab „ „

FE ক্ষেত্র = আয়ত FG. FD

= আয়ত AP. PB. „ „ ab „ „

$\therefore \quad AB^2 = AP^2 + PB^2 + 2AP.PB,$

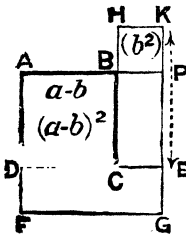
অর্থাৎ, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$

উপপাদ্য ৪৮

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ বীজগণিতের

এই সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করিতে হইবে।

অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞাটি এই ঃ

যদি একটি সরলরেখা দুইখণ্ডে বহির্বিভক্ত হয়, তবে সমস্ত রেখার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র উহার দুই খণ্ডের উপরিস্থ দুই বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি এবং খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তক্ষেত্রের অন্তরের সমান হইবে।

মনে কর, AB একটি সরলরেখা; ইহা P বিন্দুতে AP, PB এই দুই খণ্ডে বহির্বিভক্ত হইল। আরও মনে কর, AP $=a$ একক, PB $=b$ একক, সুতরাং AB $=a-b$ একক।

AB ও BP এর উপর, AP এর বিপরীত পার্শ্বে, যথাক্রমে ABCD, BPKH বর্গক্ষেত্র দুইটি অঙ্কিত কর। KP বর্ধিত কর, ইহা যেন বর্ধিত DCকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। বর্ধিত AD হইতে AF $=$ AP অংশ ছেদ কর; তাহা হইলে FD $=$ PB $= b$ হইল।

F হইতে AB অথবা DC এর সমান্তরাল করিয়া FG টান, ইহা যেন বর্ধিত PEকে G বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, AC ক্ষেত্র $=$ AG ক্ষেত্র $+$ PH ক্ষেত্র $-$ EH ক্ষেত্র $-$ FE ক্ষেত্র।

কিন্তু অঙ্কন অনুযায়ী,

AC ক্ষেত্র $=$ AB এর বর্গক্ষেত্র এবং ইহার কালি $(a-b)^2$ বর্গ একক;

AG ক্ষেত্র $=$ AP এর বর্গক্ষেত্র; „ „ a^2 „ „

PH ক্ষেত্র $=$ PB এর বর্গক্ষেত্র; „ „ b^2 „ „

EH ক্ষেত্র $=$ আয়ত EK. KH

$=$ আয়ত AP. PB; „ „ ab „ „

এবং FE ক্ষেত্র $=$ আয়ত FG. FD

$=$ আয়ত AP. PB; „ „ ab „ „

$\therefore$ $AB^2 = AP^2 + PB^2 - 2\ AP.\ PB.$

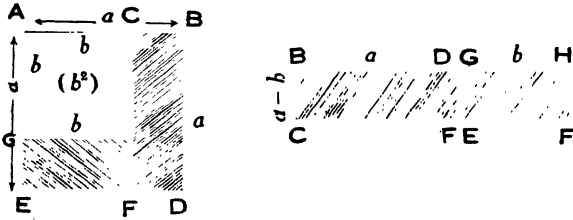
অর্থাৎ, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$

উপপাদ্য ৪৯

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ বীজগণিতের

এই সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করিতে হইবে।

অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞাটি এই :

দুইটি সরলরেখার উপরিস্থ দুই বর্গক্ষেত্রের অন্তর ঐ রেখা দুইটির সমষ্টি এবং অন্তরের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

মনে কর, AB ও AC দুটি সরলরেখা, ইহাদের মধ্যে AB AC অপেক্ষা বড়। আরও মনে কর AB $= a$ একক এবং AC $= b$ একক।

ACকে AB এর উপর রাখ ; তাহা হইলে, BC = AB − AC $= (a-b)$

AB এর উপর ABDE বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। C হইতে AE অথবা BDএর সমান্তরাল CF টান, ইহা যেন EDকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

AE হইতে AG = AC অংশ ছেদ কর।

তাহা হইলে, GE = AE − AG = AB − AC $= a - b$.

G হইতে AC এর সমান্তরাল করিয়া GH টান, ইহা যেন CFকে H বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, AD ক্ষেত্র − AH ক্ষেত্র = CD ক্ষেত্র + EH ক্ষেত্র।

কিন্তু অঙ্কন অনুযায়ী,

AD ক্ষেত্র = AB এর বর্গক্ষেত্র এবং ইহার কালি a^2 বর্গ একক ;

AH ক্ষেত্র = AC এর বর্গক্ষেত্র এবং " " b^2 " "

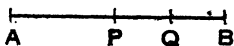
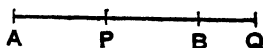
এবং CD ও EH ক্ষেত্র দুইটি আয়তক্ষেত্র ; ইহাদের একটির পার্শ্বে অপরটি এরূপভাবে স্থাপন করা যাইতে পারে (উপরের চিত্র দেখ) যে,

উহারা উভয়ে মিলিত হইয়া এমন একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করিবে যাহার দৈর্ঘ্য $(a+b)$ একক এবং প্রস্থ $(a-b)$ একক।

অতএব, CD এবং EH ক্ষেত্র দুটির কালি একত্রযোগে $(a+b)(a-b)$ বর্গ একক।

অতএব, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

অনুসিদ্ধান্ত। যদি একটি AB সরলরেখা P বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয় এবং অপর একটি Q বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত কিংবা বহির্বিভক্ত হয়, তবে উভয় স্থলেই AQ ও QB এর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র AP ও PQ এর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান হইবে।

A P Q B   A P B Q

(১ম চিত্র)   (২য় চিত্র)

মনে কর, AB সরলরেখা P বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত এবং Q বিন্দুতে প্রথম চিত্রে অন্তর্বিভক্ত ও দ্বিতীয় চিত্রে বহির্বিভক্ত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

প্রথম চিত্রে, $AQ.QB=AP^2-PQ^2$

দ্বিতীয় চিত্রে, $AQ.QB=PQ^2-AP^2$.

প্রমাণ। প্রথম চিত্রে, $AQ.QB=(AP+PQ)\,(PB-PQ)$

$=(AP+PQ)\,(AP-PQ)$

$=AP^2-PQ^2$.

সেইরূপ দ্বিতীয় চিত্র সম্বন্ধে প্রমাণ করা যাইবে পারে।

অনুশীলনী ৩০

১। কোন সরলরেখার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র উহার অর্ধেকের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের চারিগুণ।

২। কোন সরলরেখার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র তাহার এক তৃতীয়াংশের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের নয় গুণ।

৩। একটি সরলরেখা দুই খণ্ডে বিভক্ত হইলে, যদি খণ্ডদ্বয়ের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র দুটির সমষ্টি উহাদের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমান হয় তবে সরলরেখাটি দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৪। ছক-কাগজের সাহায্যে বীজগণিতের নিম্নলিখিত সূত্রগুলি সপ্রমাণ কর।

(১) $(2a)^2=4a^2$.

(২) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

(৩) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(৪) $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$

(৫) $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

৫। কোন সরলরেখার উপর ক্রমান্বয়ে A, B, C, D চারিটি বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে,

আয়ত AC. BD = আয়ত AB. CD + আয়ত AD. BC.

এবং বীজগণিতের অনুরূপ সূত্র লিখ।

৬। উপপাদ্য ৪৮ এর সাহায্যে বা অন্যপ্রকারে প্রমাণ কর যে, কোন দুই সরলরেখার উপরিস্থ দুই বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি কখনও উহাদের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ অপেক্ষা কম হইতে পারে না।

৭। উপপাদ্য ৪৯ এর অনুসিদ্ধান্তের সাহায্যে বা অন্যপ্রকারে প্রমাণ কর যে, দুটি সরলরেখার সমষ্টি নির্দিষ্ট থাকিলে, উহাদের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র উহাদের সমষ্টির অর্ধেকের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র অপেক্ষা কখনই বড় হইতে পারে না।

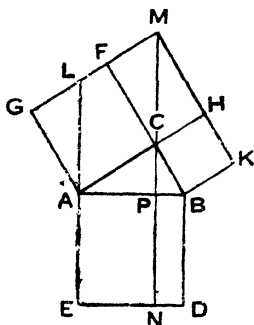
৮। একটি সরলরেখা P বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত এবং অপর Q বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$AQ^2+QB^2=2(AP^2+PQ^2).$$

এবং বীজগণিতের অনুরূপ সূত্র লিখ।

ইহা হইতে দেখাও যে, দুটি সরলরেখার সমষ্টি নির্দিষ্ট থাকিলে, উহাদের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রদ্বয় একত্রযোগে উহাদের সমষ্টির অর্ধেকের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র অপেক্ষা কখনই ছোট হইতে পারে না।

উপপাদ্য ৫০

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুটির সমষ্টির সমান।

মনে কর, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ ; ইহার ∠C সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

ABএর বর্গক্ষেত্র = ACএর বর্গক্ষেত্র + BCএর বর্গক্ষেত্র।

প্রথম প্রকার

অঙ্কন। ABDE, ACFG এবং BCHK বর্গক্ষেত্রগুলি যথাক্রমে AB, AC ও BC বাহুর উপর অঙ্কিত কর।

EA বর্ধিত কর ; ইহা যেন GF বা বর্ধিত GFকে L বিন্দুতে ছেদ করিল। C বিন্দু দিয়া BD অথবা AEএর সমান্তরাল MCN সরলরেখা টান ; ইহা যেন DEকে N বিন্দুতে এবং বর্ধিত GFকে M বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। ALG ও ABC ত্রিভুজের মধ্যে,

∵ { ∠AGL = ∠ACB ; সমকোণ বলিয়া,
∠GAL = ∠CAB ; প্রত্যেকেই ∠CALএর পূরক বলিয়া,
এবং AG = AC ; একই বর্গক্ষেত্রের বাহু বলিয়া।

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ; ∴ AL = AB. (উপ ১৫)

কিন্তু বর্গক্ষেত্রের বাহু বলিয়া, AB = AE. ∴ AL = AE.

এখন, AN আয়তক্ষেত্র = AM সামান্তরিক ; কারণ, ইহাদের AE ভূমি = AL ভূমি, এবং ইহারা একই EL ও MN সমান্তরাল রেখার মধ্যে অবস্থিত। (উপ ২৬, অনু ২)।

কিন্তু AF বর্গক্ষেত্র = AM সামান্তরিক ; কারণ, ইহাদের একই ভূমি AC এবং ইহারা একই AC ও GM সমান্তরাল রেখার মধ্যে অবস্থিত।

∴ AN আয়ত = AF বর্গক্ষেত্র।

এইরূপে DB বর্ধিত করিয়া দেখান যাইতে পারে যে,

BN আয়ত = CK বর্গক্ষেত্র

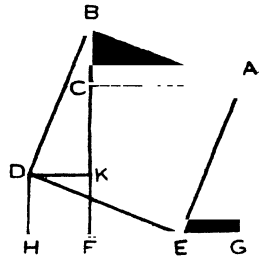
কিন্তু, AN আয়ত + BN আয়ত = AD বর্গক্ষেত্র

∴ AD বর্গক্ষেত্র = AF বর্গক্ষেত্র + CK বর্গক্ষেত্র

দ্বিতীয় প্রকার

অঙ্কন। ACএর উপর ACFG বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

GF হইতে BCএর সমান GE অংশ কাট ; বর্ধিত GF হইতে BCএর সমান FH অংশ এবং FC হইতে BCএর সমান করিয়া FK অংশ কাট।

H ও K দিয়া FC ও FHএর সহিত সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে HD ও KD সরলরেখা টান। AE, ED, BD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। এখন দেখান যাইতে পারে যে, ACB, BKD, EHD এবং AGE ত্রিভুজগুলি পরস্পর সর্বসম এবং ABDE, ABএর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র।

∴ ABএর বর্গক্ষেত্র = ABDE ক্ষেত্র

= ACKDEA ক্ষেত্র + △ACB + △BKD

= ACKDEA ক্ষেত্র + △EHD + △AGE

= ACFG ক্ষেত্র + FHDK ক্ষেত্র

কিন্তু অঙ্কন অনুযায়ী, ACFG ক্ষেত্র = ACএর বর্গক্ষেত্র

এবং FHDK ক্ষেত্র = FHএর বর্গক্ষেত্র = BCএর বর্গক্ষেত্র

∴ ABএর বর্গক্ষেত্র = ACএর বর্গক্ষেত্র + BCএর বর্গক্ষেত্র।

দ্রষ্টব্য ১। উক্ত প্রতিজ্ঞা সংক্ষেপে এইরূপে ব্যক্ত করা যায়, ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB অতিভুজ হইলে, $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

ইহা হইতে পাওয়া যায় যে, $AC^2 = AB^2 - CB^2$

এবং $CB^2 = AB^2 - AC^2$.

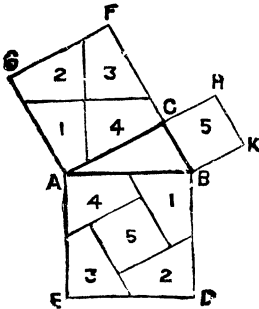
দ্রষ্টব্য ২। প্রতিজ্ঞার প্রথম প্রকার প্রমাণে দেখান হইয়াছে যে,

ACFG বর্গক্ষেত্র = AN আয়তক্ষেত্র

অর্থাৎ ACএর বর্গক্ষেত্র = AE, APএর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ;

$\therefore$ $AC^2 = AE. AP. = AB.AP$; (P CN ও ABএর ছেদবিন্দু)

সেইরূপ, $BC^2 = AB.BP$.

পরীক্ষা দ্বারা উক্ত প্রতিজ্ঞার সত্য সপ্রমাণ

মনে কর, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, ইহার $\angle C$ সমকোণ, এবং ABDE, ACFG, BCHK যথাক্রমে AB, AC ও BCএর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র।

মনে কর $AC > BC$.

ACএর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে অতিভুজ ABএর সমান্তরাল এবং লম্ব রেখা টান। ঐ রেখা দুটি AF বর্গক্ষেত্রকে 1, 2, 3, 4 চিহ্নিত চারিটি সর্বসম ক্ষেত্রে বিভক্ত করিল।

AB ও EDএর মধ্যবিন্দু দিয়া BCএর সমান্তরাল রেখা টান এবং AE ও BDএর মধ্যবিন্দু দিয়া ACএর সমান্তরাল রেখা টান। ইহারা যেন AD বর্গক্ষেত্রকে 1, 2, 3, 4, 5 চিহ্নিত অংশে বিভক্ত করিল। এখন চিহ্নিত অংশগুলি কাটিলে দেখিতে পাইবে যে, AD বর্গক্ষেত্রের 1, 2, 3, 4 চিহ্নিত অংশগুলি AF বর্গক্ষেত্রেরও 1, 2, 3, 4 চিহ্ন অংশগুলির সঙ্গে সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে এবং উহার 5 চিহ্নিত অংশ BCএর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সহিত মিলিয়া যাইবে।

মন্তব্য। উপরিউক্ত প্রতিজ্ঞাটি গ্রীসদেশীয় পণ্ডিত পিথাগোরসের নামে অভিহিত হয়, কিন্তু ইহা যে অতি প্রাচীনকাল হইতেই হিন্দু

পণ্ডিতগণ জানিতেন তাহা ভূতপূর্ব্ব ডক্‌টর থিবুট লিখিত সুলভ সূত্র সম্বন্ধে প্রবন্ধ হইতে জানা যায় *। প্রাচীন তত্ত্ব সম্বন্ধে ইদানীন্তন যে সকল পণ্ডিতগণ গবেষণা করিয়াছেন তাঁহারাও ডক্‌টর থিবুটের মতই অনুমোদন করেন।

অনুশীলনী ৩১

১। কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র মূল বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

২। ABC ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে BC ভূমির উপর AD লম্ব এবং $AB > AC$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

৩। সমবাহু ত্রিভুজের কোন বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ উহার যে কোন মধ্যমার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের চারিগুণ।

৪। ABCD একটি আয়তক্ষেত্রের ভিতরে P কোনও বিন্দু হইলে, দেখাও যে, $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

৫। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের C কোণ সমকোণ; কোনও সরলরেখা XY CBকে X বিন্দুতে এবং CAকে Y বিন্দুতে ছেদ করিল। AX ও BY সংযুক্ত করিলে, প্রমাণ কর যে,

$$AB^2 + XY^2 = AX^2 + BY^2.$$

৬। ABC ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোনও বিন্দু O হইতে OD, OE, OF যথাক্রমে BC, CA, AB এর উপর লম্ব হইলে, দেখাও যে,

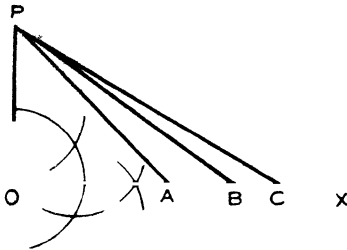
$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = CD^2 + BF^2 + AE^2.$$

৭। সমকোণী ত্রিভুজের দুই সূক্ষ্মকোণ হইতে অঙ্কিত মধ্যমার উপরিস্থ দুই বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির চারিগুণ অতিভুজের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের পাঁচগুণের সমান।

৮। a, b, c বাহু বিশিষ্ট ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ C হইতে AB এর লম্বের পরিমাণ p হইলে, দেখাও যে,

(১) $pc = ab$. (২) $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

* *Vide* Dr. Thibaut's paper "On the Sulva Sutras" which appeared in the Journal of the Asiatic Society of Bengal, Vol. xliv (1875).

৯। কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ, তিনগুণ, চারিগুণ$\cdots$ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, OP নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু। O বিন্দু হইতে OP এর উপর OX লম্ব টান। OX হইতে OA = OP অংশ কাট; PA সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে $PA^2 = OP^2 + OA^2 = OP^2 + OP^2 = 2OP^2$.

আবার, OX হইতে OB = PA অংশ কাট। PB সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, $PB^2 = OP^2 + OB^2 = OP^2 + AP^2 = 3OP^2$.

সেইরূপ, OX হইতে OC = PB অংশ কাটিলে,

$PC^2 = 4OP^2$ হইবে, ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য। $OP = 1$ হইলে, $PA^2 = 2$, $PB^2 = 3$, $PC^2 = 4$,$\cdots$হইবে।

$\therefore$ $PA = \sqrt{2}$, $PB = \sqrt{3}$, $PC = \sqrt{4}$,$\cdots\cdots$। কিন্তু PA, PB, PC$\cdots\cdots$ মাপিয়া স্থির করা যায়। সুতরাং ইহা হইতে √২, √৩, √৪ ইত্যাদির মান লৈখিক প্রণালীতে নির্ণয় করা যায়।

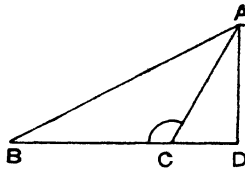
১০। দুটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

১১। দুটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

১২। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমন দুই খণ্ডে বিভক্ত কর যেন উহার একখণ্ডের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র অন্য খণ্ডের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ হয়।

১৩। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমন দুইখণ্ডে বিভক্ত কর যেন উহাদের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র দুটির সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

উপপাদ্য ৫১

স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপরিস্থ দুই বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি অপেক্ষা স্থূলকোণের সন্নিহিত দুই বাহুর একটি ও তদুপরি অন্যটির অভিক্ষেপ এই উভয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ বেশি।

মনে কর, ABC একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ ; ইহার C কোণ স্থূলকোণ। আরও মনে কর, A হইতে বর্ধিত BC এর উপর AD লম্ব।

স্নুতরাং CD BCএর উপর AC এর অভিক্ষেপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.CD.$

প্রমাণ। যেহেতু, $BD = BC + CD,$

$\therefore \quad BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$ (উপ ৪৭)

উভয় পার্শ্বে AD^2 যোগ কর।

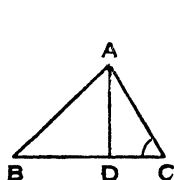
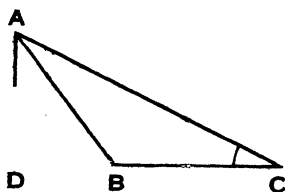
তাহা হইলে, $BD^2 + AD^2 = BC^2 + (CD^2 + AD^2) + 2BC.CD.$

কিন্তু $\angle ADC$ সমকোণ বলিয়া ;

$$\left.\begin{array}{r} BD^2 + AD^2 = AB^2 \\ \text{এবং } CD^2 + AD^2 = CA^2 \end{array}\right\} \quad \text{(উপ ৫০)}$$

$\therefore \quad AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.CD.$

উপপাদ্য ৫২

কোনও ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপরিস্থ দুই বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি অপেক্ষা সূক্ষ্মকোণের সন্নিহিত দুই বাহুর একটি ও তদুপরি অন্যটির অভিক্ষেপ এই উভয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ কম।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র)

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ ; ইহার C কোণ সূক্ষ্মকোণ। আরও মনে কর, A হইতে AD CBএর উপর (১ম চিত্র) অথবা বর্ধিত CB এর উপর (২য় চিত্র) লম্ব।

স্নুতরাং CD CB এর উপর AC এর অভিক্ষেপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.CD.$

প্রমাণ। যেহেতু প্রথম চিত্রে, $BD = BC - CD$

এবং দ্বিতীয় চিত্রে, $BD = CD - BC$

∴ উভয় চিত্রেই $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.$ (উপ ৪৮)

উভয় পার্শ্বে AD^2 যোগ কর।

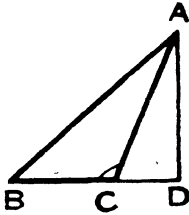
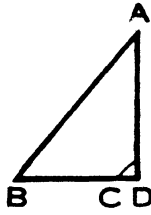
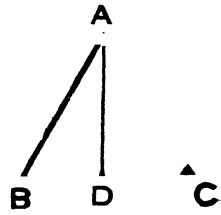
তাহা হইলে, $AD^2 + BD^2 = BC^2 + (AD^2 + CD^2) - 2BC.CD.$

কিন্তু $\angle D$ সমকোণ বলিয়া,

$$\left.\begin{aligned} AD^2 + BD^2 &= AB^2 \\ \text{এবং } AD^2 + CD^2 &= CA^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(উপ ৫০)}$$

$$\therefore \quad AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.CD.$$

উপপাদ্য ৫০, ৫১ ও ৫২ হইতে সংক্ষেপে এই পাওয়া যায়ঃ

ABC একটি ত্রিভুজের A হইতে BCএর উপর AD লম্ব, এবং

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র) (৩য় চিত্র)

(১) $\angle C$ স্থূলকোণ হইলে, (১ম চিত্র),

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.CD.$$

(২) $\angle C$ সমকোণ হইলে, (২য় চিত্র),

$$AB^2 = BC^2 + CA^2.$$

(৩) $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হইলে, (৩য় চিত্র),

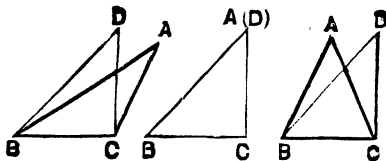
$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.CD.$$

দ্বিতীয় চিত্রে লক্ষ্য কর, লম্ব AD, ACএর সহিত মিলিয়া গিয়াছে, সুতরাং CD (অর্থাৎ BCএর উপর ACএর অভিক্ষেপ) অন্তর্হিত হইয়াছে, এবং সেজন্য এইক্ষেত্রে, $2BC.CD = ০$.

এই তিনটি ফল নিম্নলিখিত একই নির্বচনে ব্যক্ত করা যাইতে পারেঃ

ত্রিভুজের কোন বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি অপেক্ষা বড়, বা তাহার সমান, অথবা তাহা অপেক্ষা ছোট হইবে যদি শেষোক্ত বাহু দুটির অন্তর্ভূত কোণ স্থূলকোণ বা সমকোণ অথবা সূক্ষ্মকোণ হয়। এবং যখন অসমান হইবে তখন উহাদের অন্তর ঐ শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের একটি ও তদুপরি অন্যটির অভিক্ষেপ এই উভয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমান হইবে।

বিপরীতক্রমে। ত্রিভুজের কোনও কোণ (১) স্থূলকোণ (২) সমকোণ অথবা (৩) সূক্ষ্মকোণ হইবে, যদি উহার বিপরীত বাহুর উপরিস্থ

বর্গক্ষেত্র ত্রিভুজের অন্য দুই বাহুর উপরিস্থ দুই বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি অপেক্ষা বড়, তাহার সমান অথবা তাহা অপেক্ষা ছোট হয়।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র) (৩য় চিত্র)

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) $AB^2 > BC^2 + CA^2$ হইলে, $\angle BCA$ স্থূলকোণ হইবে (১ম চিত্র)

(২) $AB^2 = BC^2 + AC^2$ হইলে, $\angle BCA$ সমকোণ হইবে (২য় চিত্র)

(৩) $AB^2 < BC^2 + CA^2$ হইলে, $\angle BCA$ সূক্ষ্মকোণ হইবে (৩য় চিত্র)

প্রমাণ। (১) যদি $\angle C$ স্থূলকোণ না হয়, তবে ইহা সমকোণ অথবা সূক্ষ্মকোণ হইবেই, এবং উহাদের কোন স্থলেই AB^2, $BC^2 + CA^2$ অপেক্ষা বড় হইবে না; ইহা কল্পনা-বিরুদ্ধ।

$\therefore$ C কোণ সমকোণ অথবা সূক্ষ্মকোণ হইতে পারে না;

অতএব $\angle C$ স্থূলকোণ হইবেই।

এই প্রকারে (২) ও (৩) প্রমাণ করা যাইতে পারে।

অনুশীলনী ৩২

১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষের সহিত ভূমির কোনও বিন্দু সংযোজক রেখার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র, উহার যে কোন সমবাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র অপেক্ষা ভূমির খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র পরিমাণ কম।

২। ABC ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে BC ভূমির উপর AD লম্ব এবং O, BCএর মধ্যবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে, $AB^2 \sim AC^2 = 2BC.OD$.

৩। কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটি ২, ৩ ও ৪ ইঞ্চি হইলে তাহা স্থূলকোণী ত্রিভুজ হইবে।

৪। ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ A হইতে BCএর উপর AD লম্ব হইলে, প্রমাণ কর যে, (১) $AC^2 =$ আয়ত BC.CD

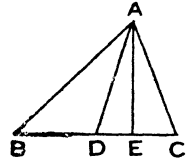
(২) $AD^2 =$ আয়ত BD.CD.

৫। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB, AC দুই সমান বাহু এবং ACএর উপর BE লম্ব হইলে দেখাও যে, $BC^2 = 2AC.CE$.

৬। কোন ত্রিভুজের দুই বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র দুটির সমষ্টি, উহার তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র এবং ঐ তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক মধ্যমার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র এই উভয়ের সমষ্টির দ্বিগুণ।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ ; AD উহার একটি মধ্যমা, ইহা BCকে দ্বিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$$

প্রমাণ। মনে কর AE BC (বা বর্ধিত BC)এর উপর লম্ব।

এখন ADB ও ADC কোণ দুটির একটি স্থূলকোণ এবং অপরটি সূক্ষ্মকোণ হইবে। মনে কর $\angle ADB$ স্থূলকোণ।

তাহা হইলে, ABD ত্রিভুজের $\angle ADB$ স্থূলকোণ বলিয়া ;

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2BD.DE. \quad \cdots \quad (১)$$

আবার, ADC ত্রিভুজের $\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ বলিয়া ;

$$AC^2 = DC^2 + AD^2 - 2DC.DE.$$

$$= BD^2 + AD^2 - 2BD.DE. \ [\because \ DC = DB]. \quad \cdots \quad (২)$$

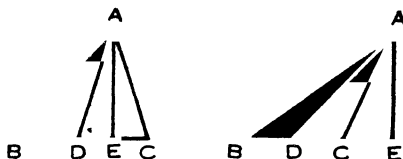
(১) ও (২) যোগ করিয়া, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$.

৭। যে সকল ত্রিভুজের একই ভূমি এবং যাহাদের অপর দুই বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান, তাহাদের শীর্ষগুলির সঞ্চারপথ এমন একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্র ভূমিব মধ্যবিন্দু হইবে।

কারণ, উল্লিখিত উদাহরণ হইতে $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$ কিন্তু দেওয়া অছে যে, $AB^2 + AC^2$ একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান। সুতরাং $AB^2 + AC^2$ একটি ধ্রুবক, আবার BD^2ও একটি ধ্রুবক।

∴ AD^2 একটি ধ্রুবক, অর্থাৎ D এই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে Aএর দূরত্ব নির্দিষ্ট হইল। সুতরাং A এর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র D.

৮। কোন ত্রিভুজের দুই বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তর উহার তৃতীয় বাহু এবং তদুপরি তাহার মধ্যবিন্দু সংযোজক মধ্যমার অভিক্ষেপ, এই উভয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা BCকে দ্বিখণ্ডিত করিল এবং

A হইতে AE, BC বা বর্ধিত BC এর উপর লম্ব, সুতরাং DE BCএর উপর AD এর অভিক্ষেপ হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 \sim AC^2 = 2\ BC.\ DE.$

প্রমাণ AEB, AEC কোণের উভয়ে সমকোণ বলিয়া,

$AB^2 = BE^2 + AE^2$ এবং $AC^2 = CE^2 + AE^2$.

$$\therefore \quad AB^2 \sim AC^2 = (BE^2 + AE^2) \sim (CE^2 + AE^2)$$
$$= BE^2 \sim CE^2 = (BE + CE)\ (BE \sim CE).$$

এখন, প্রথম চিত্রে, $BE + CE = BC$ এবং $BE \sim CE = 2DE$

কিন্তু দ্বিতীয় চিত্রে, $BE + CE = 2DE$ এবং $BE \sim CE = BC$.

∴ উভয় চিত্রেই, $AB^2 \sim AC^2 = 2BC.\ DE.$

৯। যে সকল ত্রিভুজের একই ভূমি এবং অন্য দুই বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তর একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান, তাহাদের শীর্ষগুলির সঞ্চারপথ ভূমির উপর লম্ব হয় এইরূপ এক জোড়া সরলরেখা।

কারণ উল্লিখিত উদাহরণ হইতে, $AB^2 \sim AC^2 = 2BC.DE.$ কিন্তু $AB^2 \sim AC^2$ একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান দেওয়া আছে বলিয়া ইহা একটি ধ্রুবক। আবার BCও একটি ধ্রুবক। ∴ DE একটি ধ্রুবক। সুতরাং E একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইল এবং A E দিয়া BCএর উপর অঙ্কিত লম্বের উপর অবস্থিত এবং E D বিন্দুর উভয় পার্শ্বে পড়িতে পারে।

১০। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BC D বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত বা

বহির্বিভক্ত হইলে দেখাও যে, (১) $AD^2 = AC^2 - BD.DC$ অন্তর্বিভক্ত হইলে, (২) $AD^2 = AC^2 + BD.CD$ বহির্বিভক্ত হইলে।

১১। ABC ত্রিভুজের B ও C কোণ সূক্ষ্মকোণ এবং BE, CF যথাক্রমে AC ও ABএর লম্ব হইলে, প্রমাণ কর যে, $BC^2 = AB.BF + AC.CE$.

১২। কোন সামান্তরিকের চারি বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হইবে।

১৩। চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখাদ্বয়েব উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ।

১৪। ABC ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সম্পাতবিন্দু O হইলে, দেখাও যে,

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$$

১৫। ABC ত্রিভুজের BC ভূমি যদি P বিন্দুতে এমন দুই খণ্ডে বিভক্ত হয় যেন $mBP = nCP$; তবে দেখাও যে,

$$mAB^2 + nAC^2 = mBP^2 + nCP^2 + (m+n)\, AP^2.$$

১৬। ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর পরিমাণ যথাক্রমে a, b, c একক হইলে, প্রমাণ কর যে, উহার ক্ষেত্রফল $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক হইবে। $(2s = a + b + c)$

কারণ, মনে কর AD $(= p)$ BCএর উপর লম্ব এবং $BD = x$;

$\therefore$ $DC = a - x$.

এখন, ADB সমকোণী ত্রিভুজ হইতে, $p^2 = c^2 - x^2$

আবার, ADC সমকোণী ত্রিভুজ হইতে, $p^2 = b^2 - (a-x)^2$.

$$\therefore \quad c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

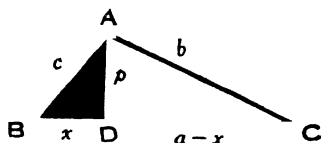
$$\therefore \quad x = (c^2 + a^2 - b^2)/2a$$

$$\therefore \quad p^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

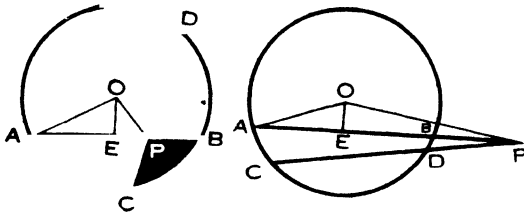
$$= (c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)/4a^2$$

$$= 4s(s-a)(s-b)(s-c)/a^2 \quad (\text{দেখান যায়})$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\, ap$ বা $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক।

মন্তব্য। উহা **ব্রহ্মগুপ্ত** (জন্ম ৬২৮ খৃষ্টাব্দ) প্রদত্ত প্রমাণ।

বৃত্ত সংশ্লিষ্ট আয়তক্ষেত্র

উপপাদ্য ৫৩

যদি কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা বৃত্তের ভিতরে অথবা বাহিরে অবচ্ছেদ করে, তবে একের খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, অপরের খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।

মনে কর, ABC বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুটি বৃত্তের ভিতরে (১ম চিত্রে) অথবা বৃত্তের বাহিরে (২য় চিত্রে) P বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, আয়ত AP. PB = আয়ত CP. PD.

অঙ্কন। মনে কর O বৃত্তের কেন্দ্র ; O হইতে AB এর উপর OE লম্ব টান। সুতরাং E বিন্দুতে AB দ্বিখণ্ডিত হইল। (উপ ৪০)

OP, OA সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। আয়ত AP. PB $= (AE + EP)(EB \sim EP)$

$= (AE + EP)(AE \sim EP), \because AE = EB$

$= AE^2 \sim EP^2$

$= (AE^2 + OE^2) \sim (EP^2 + OE^2)$

$= AO^2 \sim OP^2$

$=$ (ব্যাসার্ধ $)^2 \sim OP^2$.

এই প্রকারে দেখান যাইতে পারে যে,

আয়ত CP. PD $=$ (ব্যাসার্ধ $)^2 \sim OP^2$

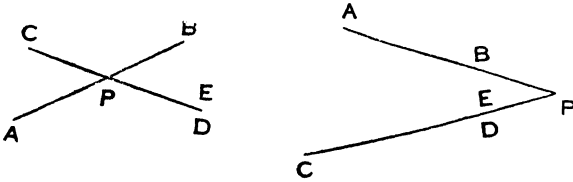
$\therefore$ আয়ত AP. PB = আয়ত CP. PD.

অনু। যদি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তকে ছেদ করিয়া

একটি জ্যা এবং ইহার একটি স্পর্শক টানা যায়, তবে জ্যা এর খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র স্পর্শকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

কারণ, যে পর্যন্ত C ও D মিলিত না হয় যদি সে পর্যন্ত P বিন্দুর চতুর্দিকে PC ঘুরিতে থাকে তবে, পরিণামে যখন C ও D মিলিত হইবে তখন PC = PD হইবে এবং PC P হইতে বৃত্তের স্পর্শক হইবে। সুতরাং আয়ত PC. PD PC এর (অর্থাৎ P হইতে বৃত্তের স্পর্শকের) উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

উপপাদ্য ৫৩ এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা

দুইটি সসীম সরলরেখা (আবশ্যকমত বর্ধিত হইয়া) পরস্পর ছেদ করিলে যদি একের দুই খণ্ডের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্যের দুই খণ্ডের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হয়, তবে উহাদের চারিটি প্রান্তবিন্দু এক পরিধিস্থ হইবে।

মনে কর. AB ও CD (অথবা বর্ধিত AB ও CD) P বিন্দুতে ছেদ করিল। আরও মনে কর, আয়ত AP. BP = আয়ত CP. DP.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B, C, D এক পরিধিস্থ।

প্রমাণ। মনে কর A, C ও B দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত CD বা বর্ধিত CDকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, AB ও CE জ্যা দুটি P বিন্দুতে ছেদ করিল বলিয়া;

আয়ত AP. PB = আয়ত CP. PE. (উপ ৫৩)

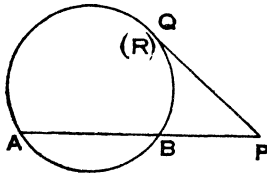
কিন্তু দেওয়া আছে, আয়ত AP. PB = আয়ত CP. PD.

∴ আয়ত CP. PE = আয়ত CP. PD.

∴ PE = PD; অর্থাৎ E Dএর সহিত মিলিত হইবে।

অতএব A, B, C ও D এক পরিধিস্থ।

অনুশীলনী ৩৩

১। বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তকে ছেদ করিয়া একটি জ্যা এবং বৃত্তের সহিত সংলগ্ন করিয়া একটি সরলরেখা টানিলে যদি সংলগ্ন রেখার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র জ্যাএর খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হয় তবে সংলগ্ন রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

মনে কর, ABQ একটি বৃত্ত এবং P উহার বহিঃস্থ এক বিন্দু। P হইতে PBA বৃত্তের একটি জ্যা এবং PQ বৃত্ত সংলগ্ন একটি সরলরেখা। আরও মনে কর $PA.PB = PQ^2$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ বৃত্তের একটি স্পর্শক।

প্রমাণ। যদি PQ বৃত্তের স্পর্শক না হয়, তবে মনে কর যেন PQ (আবশ্যক হইলে বর্ধিত হইয়া) বৃত্তকে অন্য একটি R বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে, AB ও PQ জ্যা দুটি P বিন্দুতে ছেদ করিল বলিয়া;

$PA.PB = PQ.PR$ (উপ ৫৩)

কিন্তু দেওয়া আছে যে, $PA.PB = PQ^2$, $\therefore$ $PQ.PR = PQ^2$

$\therefore$ $PR = PQ$ কিন্তু P ও Q মিলিত না হইলে তাহা হইতে পারে না। $\therefore$ P ও Q মিলিত হইবে এবং PQ স্পর্শক হইবে।

২। দুটি পরস্পর ছেদিত বৃত্তের বর্ধিত সাধারণ জ্যাএর অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শকগুলি সমান হইবে।

৩। দুটি পরস্পর ছেদিত বৃত্তের সাধারণ জ্যা বর্ধিত করিলে, উহা বৃত্তদ্বয়ের যে কোন সাধারণ স্পর্শককে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

৪। দুটি পরস্পর ছেদিত বৃত্তের সাধারণ জ্যা অথবা বর্ধিত সাধারণ জ্যাএর অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তদ্বয়ের দুটি জ্যা টানিলে উহাদের চারিটি প্রান্তবিন্দু এক পরিধিস্থ হইবে।

৫। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ এবং ACএর অন্তর্গত কোন বিন্দু P হইতে AB এর উপর PQ লম্ব হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$AP. AC = AQ. AB.$$

৬। ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ A হইতে BC এর উপর AD লম্ব হইলে, প্রমাণ কর যে, (১) $AD^2 = BD.DC$, (২) $AB^2 = BD.BC$.

৭। ABC ত্রিভুজের A ও B হইতে বিপরীত বাহুর লম্ব AD ও BE O বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, আয়ত AO.OD = আয়ত BO.OE.

৮। AD, BE এবং CF যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর লম্ব এবং H উহাদের সম্পাতবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে,

(১) $AH.HD = BH.HE = CH.HF$

(২) $AD.AH = AC.AE = AB.AF$

(৩) $AD.HD = BD.DC$.

৯। কোন বৃত্তের AB একটি নির্দিষ্ট ব্যাস এবং CD, AB বা বর্ধিত ABএর লম্ব ; যদি A হইতে কোন সরলরেখা CDকে P বিন্দুতে এবং বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখাও যে, AP.AQ নিয়তই এক হইবে।

১০। দুটি বৃত্ত পরস্পর A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ এবং অন্য একটি সরল রেখাকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করিল। যদি PA ও QA জ্যা দুটি বর্ধিত করিলে উহারা পরিধিদ্বয়কে যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখাও যে,

$$PA.PR = QA.QS = PQ^2.$$

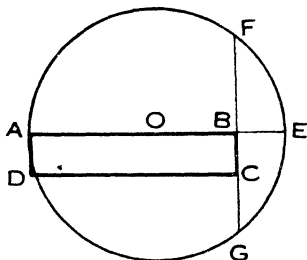
১১। O-কেন্দ্র বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু T হইতে PT, QT বৃত্তের স্পর্শক এবং P ও Q স্পর্শবিন্দু। PQ ও OT Rবিন্দুতে ছেদ করিলে, দেখাও যে,

(১) $OR.TR = PR^2$,

(২) $OR.OT = OP^2$.

১২। A, B, C একই সরলরেখায় অবস্থিত তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু ; C হইতে A ও B দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত সমূহের স্পর্শক টানিলে স্পর্শবিন্দুর সঞ্চারপথ এমন একটি বৃত্ত হইবে যাহার কেন্দ্র C.

সম্পাদ্য ২৭

একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁকিতে হইবে।

মনে কর, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র, ইহার সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন। ABকে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন BE = BC হয়। AEকে ব্যাস করিয়া একটি বৃত্ত আঁক। বর্ধিত BC যেন ঐ বৃত্তকে F ও G বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, BF (অথবা BG) এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রই অভীষ্ট বর্গক্ষেত্র হইবে।

প্রমাণ। AE ও FG জ্যা দুটি B বিন্দুতে ছেদ করিল বলিয়া,

আয়ত BF.BG = আয়ত AB.BE. (উপ ৫৩)

কিন্তু FG AE ব্যাসের উপর লম্ব বলিয়া ; BF = BG ;

∴ আয়ত BF.BG = BF (বা BG) এর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র।

আবার, আয়ত AB.BE = আয়ত ABCD ; কারণ, BE = BC

∴ BF (বা BG) এর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র = আয়ত ABCD.

অনুসিদ্ধান্ত। কোন নির্দিষ্ট ঋজুরেখক্ষেত্রের সমান বর্গক্ষেত্র আঁকিতে হইলে. প্রথমে উহার সমান ত্রিভুজ আঁকিবে। পরে ঐ ত্রিভুজের সমান আয়তক্ষেত্র আঁকিয়া উল্লিখিত প্রণালীতে ঐ আয়তক্ষেত্রের সমান বর্গক্ষেত্র আঁকিবে।

অনুশীলনী ৩৪

১। ১২ ও ৩ সেণ্টিমিটর সন্নিহিত বাহুবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করিয়া তাহার সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক। ঐ বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ কত?

ইহা হইতে লৈখিক প্রণালীতে ১২ × ৩এর বর্গমূল এবং এক দশমিক স্থান পর্যন্ত ৭২, ১০৫ এবং ৫০০ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

অঙ্ক কষিয়া ঐ ফল পরীক্ষা করিয়া দেখ।

২। একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক।

৩। ২″ ভূমির উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকিয়া তাহার সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

৪। নিম্নলিখিত অঙ্গবিশিষ্ট ABCD চতুর্ভুজ আঁকিয়া তাহার সমান বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

(১) AD = ২″, ∠A = ৪৬°, AB = ৪″, ∠B = ১৩৭°, BC = ৩″

(২) AB = ২″, BC = ৩″, CD = ৪″, DA = ৫″, ∠A = ৫৩°.

৫। একটি নির্দিষ্ট (১) পঞ্চভুজ, অথবা (২) সুষম ষড়্ভুজের সমান বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

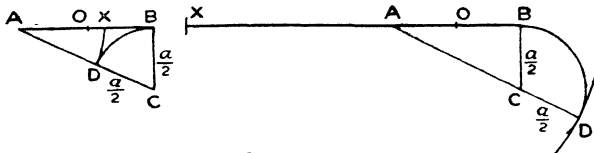
৬। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমন দুই খণ্ডে বিভক্ত কর যেন উহাদের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়। কখন ইহা অসম্ভব হইবে?

ইহা হইতে লৈখিক প্রণালীতে ১০কে এমন দুই ভাগে বিভক্ত কর যাহাদের গুণফল ২৪ হইবে।

[১০ এবং ২৪ ÷ ১০ বা ২·৪ একক দৈর্ঘ্যের বাহু বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করিয়া তাহার সমান বর্গক্ষেত্র আঁক।]

৭। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

সম্পাদ্য ২৮

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমন দুই খণ্ডে বিভক্ত করিতে হইবে যেন সমস্ত রেখা ও উহার এক খণ্ডের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্য খণ্ডের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র)

মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, ইহাকে কোন বিন্দু X এতে এমন দুই AX ও BX খণ্ডে বিভক্ত করিতে হইবে যেন

AB. BX = AX^2 হয়।

অঙ্কন। ABকে O বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। B বিন্দুতে ABএর উপর BC লম্ব টান; যেন BC AO বা BOএর সমান হয়। AC সংযুক্ত কর।

CA (১ম চিত্র) বা বর্ধিত CA (২য় চিত্র) হইতে BC এর সমান করিয়া CD অংশ ছেদ কর। AB (১ম চিত্র) বা বর্ধিত BA (২য় চিত্র) হইতে AD এর সমান AX অংশ কাট।

তাহা হইলে, X বিন্দুতে AB অভীষ্টরূপে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ। মনে কর AB = a এবং AX = x,

তাহা হইলে, AD = x ; CD = BC = $\frac{1}{2}a$

$AB^2 = AC^2 - BC^2$; ABC সমকোণী ত্রিভুজ হইতে,

$= (AC + BC)\ (AC - BC)$.

এখন, ১ম চিত্রে AC + BC = $a + x$ এবং AC − BC = x

$\therefore \quad a^2 = (a+x)\,x = ax + x^2$

$\therefore \quad a^2 - ax = x^2$, অথবা $a(a-x) = x^2$.

অর্থাৎ AB. BX = AX^2.

আবার ২য় চিত্রে AC + BC = x এবং AC − BC = $x - a$

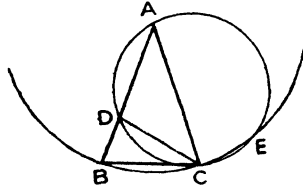
$\therefore \quad a^2 = x(x-a) = x^2 - ax$

$\therefore \quad a^2+ax=x^2$, অথবা $a(a+x)=x^2$

অর্থাৎ $AB.\ BX=AX^2$.

সংজ্ঞা। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোন বিন্দুতে দুইখণ্ডে ছেদ করিলে যদি সমস্তরেখা ও উহার এক খণ্ডের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্য খণ্ডের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমান হয় তবে সরলরেখাটিকে ঐ বিন্দুতে **আয়াম ছেদ** (medial section) করা হইল বলা হয়।

সম্পাদ্য ২৯

এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ভূমি সংলগ্ন প্রত্যেক কোণ শিরঃকোণের দ্বিগুণ হইবে।

অঙ্কন। AB একটি সরলরেখা লও এবং উহাকে D বিন্দুতে এরূপে বিভক্ত কর যেন $AB.\ BD=AD^2$ হয়। (সম্পাদ্য ২৮)

Aকে কেন্দ্র করিয়া এবং AB ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক ; এবং ঐ বৃত্তে AD এর সমান BC জ্যা স্থাপন কর। AC সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। CD সংযুক্ত কর এবং ACD ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁক।

এখন, অঙ্কন অনুযায়ী, $AB.\ DB=AD^2=BC^2$.

অতএব, BC ADC বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

$\therefore \quad \angle BCD=$ একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle CAD$

$\therefore \quad \angle BCD+\angle DCA=\angle CAD+\angle DCA=$ বহিঃ $\angle CDB$

অর্থাৎ $\angle BCA=\angle CDB$.

কিন্তু $\angle BCA = \angle CBD$; কারণ, $AB = AC$

$\therefore \quad \angle CBD = \angle CDB.$

$\therefore \quad CD = BC = AD.$

$\therefore \quad \angle ACD = \angle A$

আবার, $\angle DCB$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle A$,

$\therefore$ সমস্ত $\angle ACB = 2\angle A$ এবং $\angle ABC = 2\angle A$.

দ্রষ্টব্য। এস্থলে লক্ষ্য কর $\angle A = ৩৬^\circ$ = ২ সমকোণের $\frac{১}{৫}$. এবং $\angle B = \angle C = ৭২^\circ$ = ৪ সমকোণের $\frac{১}{৫}$।

অতএব, উক্ত সম্পাদ্য. হইতে মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে ১৮°, ৩৬° এবং ৭২° কোণ অঙ্কিত করিবার প্রণালী পাওয়া যায় এবং এক সমকোণকে পাঁচ সমান অংশে বিভক্ত করা যায়।

অনুশীলনী ৩৫

১। একটি সমকোণ আঁকিয়া তাহাকে সম্পাদ্য ২৯ এর সাহায্যে পাঁচ সমান অংশে বিভক্ত কর।

২। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার শিরঃকোণ প্রত্যেক ভূমি সংলগ্ন কোণের তিনগুণ।

[সম্পাদ্য ২৯ এর চিত্রে ACD উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে]

৩। সম্পাদ্য ২৯ এর চিত্রে অঙ্কিত বৃত্ত দুটি পুনঃ E বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে $BC = CE$.

ইহা হইতে দেখাও যে, ADC বৃত্ত ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমান।

৪। দেখাও যে, সম্পাদ্য ২৯ এর সাহায্যে কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম দশভুজ বা সুষম পঞ্চভুজ অন্তর্লিখিত করা যাইতে পারে।

[সম্পাদ্য ২৯ এর চিত্রে BCE বৃত্তের কেন্দ্রস্থ BAC কোণ $= ৩৬^\circ = \frac{৩৬০^\circ}{১০}$, সুতরাং BC ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত সুষম দশভুজের বাহু।]

৫। দেখাও যে AD, DC, CE ইত্যাদি ADC বৃত্তে অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজের বাহু।

৬। ১'৫" একটি সরলরেখা টানিয়া তাহাকে দুই খণ্ডে আয়াম বিভক্ত কর।

৭। ১″ বাহু বিশিষ্ট এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন উহার (১) ভূমিসংলগ্ন প্রত্যেক কোণ শিরঃকোণের দ্বিগুণ হয়, (২) শিরঃকোণ ভূমিসংলগ্ন প্রত্যেক কোণের তিনগুণ হয়।

৮। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা কোন বিন্দুতে আয়াম বিভক্ত হইলে প্রমাণ কর যে, উহার দুই খণ্ডের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র খণ্ডদ্বয়ের সমষ্টি এবং অন্তরের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।

৯। কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমন দুই খণ্ডে (১) অন্তর্বিভক্ত (২) বহির্বিভক্ত কর যেন ঐ খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

[মনে কর, AB নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং P নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহু। (১) ABএর মধ্যবিন্দু D হইতে DE লম্ব টান, যেন DE = P হয়। Eকে কেন্দ্র এবং AD ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত ABকে C বিন্দুতে ছেদ করিলে C উদ্দিষ্ট বিন্দু হইবে। (২) এস্থলে B হইতে BE = P লম্ব টান এবং Dকে কেন্দ্র করিয়া DE ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত বর্ধিত ABকে C বিন্দুতে ছেদ করিলে C উদ্দিষ্ট বিন্দু হইবে।]

১০। কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা ABকে এমন দুই AC ও BC খণ্ডে (১) অন্তর্বিভক্ত বা বহিবিভক্ত কর যেন (১) $AC^2 + BC^2 = P^2$, (২) $AC^2 - BC^2 = P^2$ হয়। (P অপর একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা)।

বিবিধ অনুশীলনী ৪

১। ত্রিভুজের কোনও কোণ স্থূল, সম বা সূক্ষ্ম হইবে যদি ঐ কোণ হইতে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক মধ্যমা বিপরীত বাহুর অর্ধেকের কম বা সমান অথবা বেশি হয়।

২। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের অবচ্ছেদবিন্দু সমকোণের সন্নিহিত দুই বাহু হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

৩। দুটি সমান সরলরেখা পরস্পর সমকোণে অবচ্ছেদ করিলে উহাদের চারি প্রান্তবিন্দু সংযোজক রেখাদ্বারা উৎপন্ন চতুর্ভুজ উহাদের যে কোন একটির অর্ধেকের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমান।

৪। কোন চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল এমন একটি ত্রিভুজের সমান, যাহার

দুই বাহু চতুর্ভুজের দুই কর্ণের সমান এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ কর্ণদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোন এক কোণের সমান।

৫। AB একটি সরলরেখার A ও B বিন্দু হইতে উহার উপর AC ও BD লম্ব টানা গেল; যদি $AC+BD=AB$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$CD^2=2(AC^2+BD^2).$$

৬। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজ, উহার অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সমবাহু ত্রিভুজের সমষ্টির সমান।

৭। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজের BC বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত হইলে যদি $BD.DC=BC^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $AD^2=2AC^2$.

৮। ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের, A, B ও C বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর যথাক্রমে AD, BE ও CF লম্ব হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$BC^2+CA^2+AB^2=2(AB.AF+BC.BD+CA.CE).$$

৯। AB ও CD দুটি নির্দিষ্ট সসীম সরলরেখা। প্রমাণ কর যে, AB ও উহার উপর CDএর অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, CD ও উহার উপর ABএর অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

১০। একটি সরলরেখা AB, O বিন্দুতে দুইখণ্ডে বিভক্ত হইলে দেখাও যে, যখন $OA=OB$ হইবে তখন (১) OA^2+OB^2 ক্ষুদ্রতম হইবে কিন্তু (২) AO.OB বৃহত্তম হইবে।

১১। ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের অবচ্ছেদ বিন্দু O এবং P অন্য কোনও বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$AP^2+BP^2+CP^2+DP^2=4OA^2+4OP^2.$$

১২। ABCD একটি আয়তক্ষেত্র এবং P কোনও এক বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে, $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$.

১৩। দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাস ABCD এবং P, Q যথাক্রমে বাহিরের এবং ভিতরের পরিধির অন্তর্গত দুই বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$BP^2+CP^2=AQ^2+DQ^2.$$

১৪। কোন চতুর্ভুজের চারি বাহুর উপরিস্থ চারি বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের উপরিস্থ দুই বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি অপেক্ষা কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের চারিগুণ বেশি।

১৫। কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের উপরিস্থ তিন বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির

তিনগুণ, মধ্যমাত্রয়ের উপরিস্থ তিন বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির চারিগুণের সমান।

১৬। $(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$, বীজগাণতের এই সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞাটি সপ্রমাণ কর।

১৭। $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$ বীজগণিতের এই সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞাটি সপ্রমাণ কর।

১৮। কোন বৃত্তের AOB, COD দুটি পরস্পর লম্ব জ্যা হইলে, প্রমাণ কর যে, $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=($ ব্যাস$)^2$.

১৯। দুটি বৃত্ত পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিলে, উহাদের কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক রেখার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র উহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের উপরিস্থ দুই বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হইবে।

২০। দুটি পরস্পর ছেদিত বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক রেখার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র উহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের উপরিস্থ দুই বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হইলে বৃত্ত দুটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিবে।

২১। কোন বৃত্তের কেন্দ্র O এবং TP ও TQ উহার দুটি স্পর্শক; OT স্পর্শবিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, T এবং R দিয়া অঙ্কিত যে কোনও বৃত্ত উক্ত বৃত্তকে সমকোণে ছেদ করিবে।

২২। R ও r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুটি বৃত্তের O এবং C কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখা S বিন্দুতে দুই খণ্ডে বিভক্ত হইলে, যদি $OS^2-CS^2=R^2-r^2$ হয় এবং OCএর উপর ST লম্ব হয়, তবে STএর অন্তঃস্থ যে কোনও বিন্দু হইতে বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শকগুলি পরস্পর সমান হইবে।

[ST সরলরেখাকে উক্ত বৃত্তদ্বয়ের **মূলাক্ষ** (radical axis) বলে। অতএব, যে বিন্দু হইতে দুটি বৃত্তের স্পর্শকগুলি পরস্পর সমান হয় তাহার সঞ্চারপথই বৃত্তদ্বয়ের মূলাক্ষ।]

২৩। ABCDE একটি সুষম পঞ্চভুজের AC ও BEএর ছেদবিন্দু H হইলে, দেখাও যে, $CH^2=AC.AH$.

২৪। কোন বৃত্তে একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং একটি সুষম ষড়ভুজ অন্তর্লিখিত হইলে, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের কোন বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র ষড়ভুজের কোন বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ।

(সংখ্যামূলক)

২৫। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ২৫ ফুট, এবং এক বাহু ৭ ফুট হইলে, অপর বাহুর এবং সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর পাতিত লম্বের পরিমাণ কত ?

২৬। একটি রম্বসের কর্ণদ্বয় ৮০ ফুট ও ৬০ ফুট হইলে, উহার উন্নতি এবং পরিসীমা কত ?

২৭। সমকোণী ত্রিভুজের এক বাহু ৭ ফুট এবং অতিভুজ ও অন্য বাহুর অন্তর ১ ফুট হইলে, অতিভুজ এবং অন্য বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২৮। ১৩, ১৪ এবং ১৫ ফুট বাহু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ১৪ ফুট দীর্ঘ বাহুর উপর বিপরীত শীর্ষ হইতে পাতিত লম্বের পরিমাণ কত নির্ণয় কর।

২৯। কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয় ৭, ২৪, ২৫ ফুট ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

৩০। কোন ত্রিভুজের দুই বাহু ৯ ফুট ও ১২ ফুট এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ অবশিষ্ট দুই কোণের সমান, ত্রিভুজের অবশিষ্ট বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

৩১। দুটি পরস্পর ছেদিত সমান বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ১৬ সেঃ মিঃ এবং সাধারণ জ্যাএর দৈর্ঘ্য ৩০ সেঃ মিঃ হইলে, উহাদের ব্যাসার্ধের পরিমাণ কত ?

৩২। দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে ৪ ও ৫ সেন্টিমিটর ; উহাদের বাহিরের বৃত্তের কোন জ্যা ভিতরের বৃত্তকে স্পর্শ করিলে উহার দৈর্ঘ্য কত হইবে নির্ণয় কর।

(সম্পাদ্য)

৩৩। দুটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক।

৩৪। তিনটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক।

৩৫। কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অর্ধেকের সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক।

৩৬। দুটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক।

৩৭। দুটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমষ্টি অথবা অন্তরের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

৩৮। ১″, $\sqrt{২}$ ইঞ্চি, $\sqrt{৩}$ ইঞ্চি······দৈর্ঘ্যের সরলরেখা টান।

৩৯। ২″, ২ $\sqrt{৩}$ ইঞ্চি এবং ৫″ বাহু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁক এবং মাপিয়া উহার প্রত্যেক কোণের পরিমাণ স্থির কর।

পঞ্চম ভাগ

প্রথম পরিচ্ছেদ—সংজ্ঞা

একটি রাশি সমজাতীয় অন্য একটি রাশির কত গুণ বা ভাগ তাহা যদ্দ্বারা প্রকাশিত হয় তাহাকে প্রথম রাশির সহিত দ্বিতীয় রাশির **অনুপাত** (Ratio) বলে।

যথা, ১০ ফুটের সহিত ২ ফুটের অনুপাত ৫ ; কারণ, ১০ ফুট ২ ফুটের কত গুণ তাহা (১০ ফুট ÷ ২ ফুট) বা ৫ দ্বারা সূচিত হয়। সেইরূপ,

A ও B এর অনুপাত $= A \div B$ বা $\frac{A}{B}$.

A ও B এর অনুপাত 'A : B' এইরূপে লিখিতে হয় এবং 'A অনুপাত B' এইরূপে পড়িতে হয়।

অনুপাতের প্রথম রাশিকে **পূর্বরাশি** (antecedent) এবং দ্বিতীয় বা শেষ রাশিকে **উত্তর রাশি** (consequent) বলে।

চারিটি রাশির মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হইলে একটি **সমানুপাত** (proportion) উৎপন্ন হয়, এবং ঐ চারিটি রাশিকে **আনুপাতিক** (proportional) রাশি বলা হয়। যথা, a, b, c ও d চারিটি আনুপাতিক রাশি হইলে, $a : b = c : d$ বা $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হইবে।

$a : b = c : d$ ইহাকে সাধারণত '$a : b :: c : d$' এইরূপে লিখা হয়।

যে দুটি একজাতীয় রাশিকে কোনও সাধারণ এককে ঠিক প্রকাশিত করা যায় তাহাদিগকে **প্রমেয়** (Commensurable) রাশি বলে।

মন্তব্য। সমজাতীয় দুটি রাশিকে সকল সময় কোনও সাধারণ এককে ঠিক প্রকাশিত করা সম্ভবপর হয় না। যেমন, বর্গক্ষেত্রের বাহু এবং উহার কর্ণ। কারণ, যদি বর্গক্ষেত্রের বাহু এক ইঞ্চি হয়, উহার কর্ণ $\sqrt{২}$ ইঞ্চি হইবে। $\sqrt{২}$ এর আসন্ন মান যে কোনও দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় করা যাইতে পারিলেও তাহার প্রকৃত মান নির্ণয় করা যায় না। সুতরাং এক ইঞ্চি ও $\sqrt{২}$ ইঞ্চিকে কোনও সাধারণ এককে ঠিক প্রকাশ করা যায় না। এরূপ দুটি রাশিকে **অমেয়** (incommensurable) রাশি বলে। কিন্তু ঐরূপ দুটি রাশিকেও যে কোনও অভীষ্ট সন্নিহিত মান পর্যন্ত যথেষ্ট পরিমাণ ক্ষুদ্র সাধারণ এককে প্রকাশিত করা যাইতে

পারে। কারণ, মনে কর কোন বর্গক্ষেত্রের বাহু = ১″ এবং কর্ণ = √২ ইঞ্চি = ১·৪১৪২১৩৫ ইঞ্চি। এখন যদি $\frac{১}{১০০০০০০}$ ইঞ্চিকে একক লওয়া হয়, তবে ঐ বর্গক্ষেত্রের বাহু = ১০০০০০০ একক এবং কর্ণ = ১৪১৪২১৩·৫ = ১৪১৪২১৪ একক প্রায় হইবে এবং ইহাতে ভুলের পরিমাণ $\frac{১}{১০০০০০০}$ ইঞ্চিরও কম। ইচ্ছা করিলে ইহা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর একক লইয়া ঐ ভুলের পরিমাণ আরও কম করা যাইতে পারে। সুতরাং ব্যবহারিক ক্ষেত্রে ঐরূপ রাশিকেও প্রমেয় রাশি রূপে গণ্য করা যাইতে পারে।

সমানুপাতের প্রথম ও চতুর্থ রাশি দুটিকে **প্রান্তীয় রাশি** (extremes) এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয়টিকে **মধ্যক রাশি** (means) এবং চতুর্থ রাশিকে প্রথম তিনটির **চতুর্থ আনুপাতিক** (fourth proportional) বলে। যথা, $a : b :: c : d$ এই সমানুপাতে a ও d প্রান্তীয়, b ও c মধ্যক রাশি এবং d a, b ও c এই তিনটির চতুর্থ আনুপাতিক।

সমানুপাতের দুটি রাশির উভয়েই অনুপাতের পূর্বরাশি অথবা উভয়েই উত্তর রাশি হইলে, তাহাদিগকে **অনুরূপ** (corresponding) রাশি বলে।

যথা, $a : b :: c : d$ এই সমানুপাতে a ও c অনুরূপ রাশি। সেইরূপ, b ও d অনুরূপ রাশি।

যদি তিনটি রাশি এইরূপ সম্বন্ধ বিশিষ্ট হয় যে, উহাদের ১ম : ২য় :: ২য় : ৩য় হয়, তবে উহাদিগকে **আনুপাতিক** (proportional) বলা হয়। উহাদের দ্বিতীয়টিকে প্রথম ও তৃতীয়টির **মধ্যকানুপাতিক** (mean proportional) এবং তৃতীয়টিকে প্রথম ও দ্বিতীয়টির **তৃতীয় আনুপাতিক** (third proportional) বলা হয়।

যথা, $a : b :: b : c$ হইলে, a, b, c আনুপাতিক হইবে, এবং ঐ ক্ষেত্রে, b a ও c এর মধ্যকানুপাতিক এবং c a ও b এর তৃতীয় আনুপাতিক হইবে।

স্বতঃসিদ্ধ

(১) যে সকল অনুপাত একই অনুপাতের সমান তাহারা পরস্পর সমান।

যথা, $a : b = p : q$ এবং $c : d = p : q$ হইলে; স্পষ্টই, $a : b = c : d$.

(২) যে সকল রাশির সহিত একই রাশির অনুপাতগুলি সমান তাহারা পরস্পর সমান।

যথা, $a : b = m : b$ হইলে, স্পষ্টই $a = m$.

(৩) **সমান সমান রাশির সহিত একই বা সমান সমান রাশির অনুপাতগুলি পরস্পর সমান।**

যথা, $a=m$ এবং $b=n$ হইলে; স্পষ্টই, $a:b=m:n$.

চারিটি আনুপাতিক রাশি সম্বন্ধে কতিপয় সিদ্ধান্ত

১। **চারিটি রাশি আনুপাতিক হইলে, তাহারা বিপরীত-ক্রমেও আনুপাতিক হইবে।**

অর্থাৎ $a:b=c:d$ হইলে, $b:a=d:c$ হইবে।

কারণ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; অতএব $1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}$ $\therefore$ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

অর্থাৎ, $b:a=d:c$

ইহাকে **বিপরীত ক্রিয়া** (invertendo) বলে।

২। **চারিটি আনুপাতিক রাশির প্রান্তীয় রাশিদ্বয়ের গুণফল মধ্যক রাশিদ্বয়ের গুণফলের সমান।**

অর্থাৎ, $a:b=c:d$ হইলে, $ad=bc$ হইবে। কারণ,

দেওয়া আছে যে, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. উভয় দিকে bd দিয়া গুণ করিয়া, $ad=bc$.

বিপরীতক্রমে, যদি $ad=bc$ হয়, তবে $a:b=c:d$ হইবে।

কারণ, $ad=bc$; উভয় দিকে bd দিয়া ভাগকরিলে,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{; অর্থাৎ, } a:b=c:d.$$

অনুসিদ্ধান্ত ১। চারিটি সরলরেখা আনুপাতিক হইলে, প্রান্তীয় রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র মধ্যরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।

অনু ২। তিনটি রাশি আনুপাতিক হইলে, প্রান্তীয় রাশি দুটির গুণফল মধ্যক রাশির বর্গের সমান হইবে।

অর্থাৎ যদি $a:b::b:c$ হয়, তবে $ac=b^2$ হইবে।

অনু ৩। তিনটি সরলরেখা আনুপাতিক হইলে, প্রান্তীয় রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র মধ্যক রেখার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

দ্রষ্টব্য। উক্ত অনুসিদ্ধান্তগুলির বিপরীত প্রতিজ্ঞাগুলিও সত্য হইবে।

৩। চারিটি রাশি আনুপাতিক হইলে, উঁহাদিগকে একান্তরক্রমে লইলেও উহারা আনুপাতিক হইবে।

অর্থাৎ, $a : b = c : d$ হইলে, $a : c = b : d$ হইবে।

কারণ, যেহেতু $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\therefore$ $ad = bc$;

উভয় দিকে cd দিয়া ভাগ করিয়া, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ অর্থাৎ, $a : c = b : d$.

ইহাকে **একান্তর ক্রিয়া** (alternando) বলে।

৪। চারিটি রাশি আনুপাতিক হইলে, উহাদের প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির সমষ্টি বা অন্তরের সহিত দ্বিতীয় রাশির অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির সমষ্টি বা অন্তরের সহিত চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হইবে।

অর্থাৎ $a : b = c : d$ হইলে, (১) $a + b : b = c + d : d$
এবং (২) $a - b : b = c - d : d$ হইবে।

কারণ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\therefore$ $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$; $\therefore$ $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

অর্থাৎ, $a + b : b = c + d : d$ ...(১)

আবার, $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$ $\therefore$ $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

অর্থাৎ, $a - b : b = c - d : d$ ...(২)

(১) ও (২) এর প্রথমটিকে **যোগক্রিয়া** (componendo) এবং দ্বিতীয়টিকে **ভাগক্রিয়া** (dividendo) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত। $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হইলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ হইবে।

কারণ, (১) কে (২) দিয়া ভাগ করিলেই ইহা পাওয়া যাইবে।

৫। সমজাতীয় রাশিদ্বারা উৎপন্ন কোনও সংখ্যক অনুপাত পরস্পর সমান হইলে, উহাদের পূর্ব রাশিগুলির সমষ্টির সহিত

উত্তর রাশিগুলির সমষ্টির অনুপাত প্রত্যেক অনুপাতের সমান হইবে।

অর্থাৎ, যদি $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\cdots\cdots$হয়, তবে

$$\frac{x+y+z+\ldots}{a+b+c+\ldots}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\cdots\cdots \text{হইবে।}$$

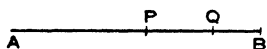
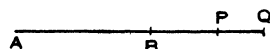
মনে কর, $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}, \cdots\cdots$ অনুপাতগুলির প্রত্যেকে $=k$.

$$\therefore \quad x=ak, \quad y=bk, \quad z=ck, \quad \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad x+y+z+\ldots=k(a+b+c+\ldots)$$

$$\therefore \quad \frac{x+y+z+\ldots}{a+b+c+\ldots}=k=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\ldots\ldots$$

৬। একটি নির্দিষ্ট সীমা বিশিষ্ট সরলরেখা কেবল **একটি মাত্র** বিন্দুতে কোন নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত অথবা বহির্বিভক্ত হইতে পারে।

A P Q B A B P Q

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র)

কারণ, যদি সম্ভব হয়, তবে মনে কর যেন AB সরলরেখা P ও Q এই দুই বিন্দুতে একই (মনে কর $m:n$) অনুপাতে প্রথম চিত্রে অন্তর্বিভক্ত অথবা দ্বিতীয় চিত্রে বহির্বিভক্ত হইল।

তাহা হইলে, $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}$; উভয়েই $m:n$ অনুপাতের সমান বলিয়া।

এখন প্রথম চিত্রে যোগক্রিয়া দ্বারা, এবং দ্বিতীয় চিত্রে ভাগক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{AB}{PB}=\frac{AB}{QB} \qquad \therefore \quad PB=QB.$$

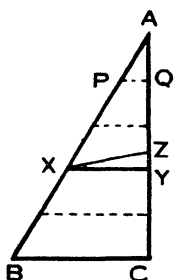
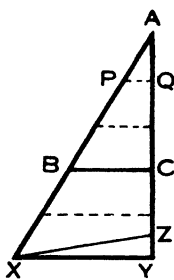
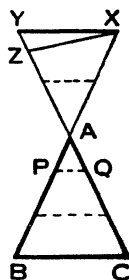
কিন্তু P ও Q মিলিত না হইলে, ইহা অসম্ভব।

$\therefore$ P ও Q মিলিত হইবে, অর্থাৎ AB সরলরেখা $m:n$ অনুপাতে মাত্র এক বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত হইবে।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ—উপপাদ্য

উপপাদ্য ৫৪

ত্রিভুজের কোনও এক বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা উহার অন্য দুই বাহুকে বা বর্ধিত বাহুকে আনুপাতিক ভাবে বিভক্ত করিবে।

বিপরীতক্রমে, যদি কোন সরলরেখা কোন ত্রিভুজের দুই বাহুকে আনুপাতিক ভাবে বিভক্ত করে, তবে তাহা ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হইবে।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র) (৩য় চিত্র)

মনে কর, XY সরলরেখা ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল ; এবং ইহা AB ও AC কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AX : XB = AY : YC.

প্রমাণ। মনে কর, X ABকে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করিল, অর্থাৎ মনে কর AX : BX = $m : n$.

সুতরাং যদি AXকে 'm' সমান অংশে বিভক্ত করা যায়, তবে BXকে ঐরূপ 'n' সমান অংশে বিভক্ত করা যাইবে।

এখন, AX ও BXকে যথাক্রমে m ও n সমান অংশে বিভক্ত করিয়া প্রত্যেক ছেদবিন্দু হইতে BC এর সমান্তরাল সরলরেখা টান।

মনে কর, AP AXএর ঐরূপ একটি অংশ এবং P হইতে BC এর সমান্তরাল সরলরেখা ACকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, AY ও YC ঐ সমান্তরাল সরলরেখাগুলি দ্বারা যথাক্রমে m ও n সমান অংশে বিভক্ত হইল, এবং উহাদের প্রত্যেক অংশ AQ এর সমান হইল। (উপ ২৫)

স্থতরাং $AY = m.\ AQ$; এবং $YC = n.\ AQ$.

$$\therefore \quad \frac{AY}{YC} = \frac{m.\ AQ}{n.\ AQ} = \frac{m}{n}.$$

$$\therefore \quad AX : XB = AY : YC.$$

বিপরীতক্রমে, মনে কর, XY AB ও ACকে আনুপাতিক ভাবে বিভক্ত করিল, অর্থাৎ মনে কর $AX : XB = AY : YC$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, XY BC এর সমান্তরাল।

প্রমাণ। যদি XY BCএর সমান্তরাল না হয় তবে মনে কর XZ, BCএর সমান্তরাল, XZ যেন ACকে Z বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, $AX : XB = AZ : ZC$

কিন্তু দেওয়া আছে যে, $AX : XB = AY : YC$.

$$\therefore \quad AZ : ZC = AY : YC.$$

স্থতরাং AC Y ও Z এই দুই বিন্দুতে একই অনুপাতে প্রথম চিত্রে অন্তর্বিভক্ত এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় চিত্রে বহির্বিভক্ত হইল। কিন্তু ইহা অসম্ভব।

∴ XY BCএর সমান্তরাল না হইয়া পারে না।

অর্থাৎ XY BCএর সমান্তরাল।

অনুসিদ্ধান্ত। XY BC এর সমান্তরাল হইলে, $AX : AB = AY : AC$

কারণ, প্রথম চিত্রে ; $\frac{AX}{AB} = \frac{m.\ AP}{(m+n)\ AP} = \frac{m}{m+n}$

এবং $\frac{AY}{AC} = \frac{m.\ AQ}{(m+n)\ AQ} = \frac{m}{m+n}$

$$\therefore \quad AX : AB = AY : AC.$$

সেই প্রকার দ্বিতীয় ও তৃতীয় চিত্রেও দেখান যাইতে পারে যে,

$$AX : AB = m : m - n = AY : AC.$$

বিপরীতক্রমে, $AX : AB = AY : AC$ হইলে, XY BCএর সমান্তরাল হইবে।

অনুশীলনী ৩৬

১। ত্রিভুজের কোনও বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা অন্য বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

২। ত্রিভুজের কোনও দুই বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা, তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হইবে।

৩। ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখা তির্যক্ বাহুদ্বয়কে বা বর্ধিত তির্যক্ বাহুদ্বয়কে আনুপাতিক ভাবে ছেদ করিবে।

৪। ট্রাপিজিয়মের তির্যক্ বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল হইবে।

৫। ABC ও ABD ত্রিভুজদ্বয়ের সাধারণ ভূমির অন্তঃস্থ কোনও বিন্দু E হইতে AC ও AD এর সমান্তরাল সরলরেখা BC ও BDকে যথাক্রমে F ও G বিন্দুতে ছেদ করিলে, দেখাও যে, FG CDএর সমান্তরাল হইবে।

৬। ABC ত্রিভুজের শিরঃকোণ-দ্বিখণ্ডক BC ভূমিকে D বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, $BD : DC = BA : AC$.

৭। ABC ত্রিভুজের শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক BC ভূমিকে D বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, $BD : DC = BA : AC$.

৮। যে সরলরেখা ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর সহিত সমভাবে নত তাহা BC, CA ও AB বাহুকে (আবশ্যক মত বর্ধিত হইলে) যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে,

$$BD : DC = BF : CE.$$

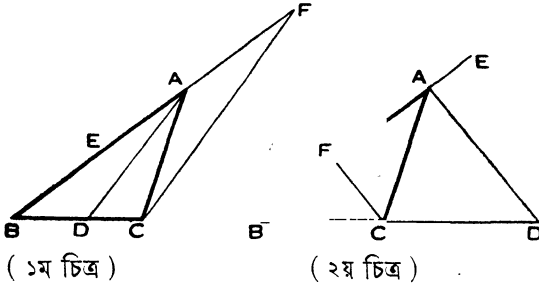
৯। ABC ত্রিভুজের B কোণের দ্বিখণ্ডক ABকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে পুনঃ D বিন্দুকে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে D বিন্দু হইতে BC এর সমান্তরাল সরলরেখা ACকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

১০। ABC ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দু B ও C হইতে বিপরীত বাহু পর্যন্ত অঙ্কিত BE, CF সরলরেখাদ্বয় A বিন্দুগামী মধ্যমাতে প্রতিচ্ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, EF BCএর সমান্তরাল হইবে।

উপপাদ্য ৫৫

ত্রিভুজের শিরঃকোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক বা বহির্দ্বিখণ্ডক ভূমিকে অন্য দুই বাহুর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত করে।

বিপরীতক্রমে, যদি ত্রিভুজের ভূমি কোনও বিন্দুতে উহার অন্য দুই বাহুর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত হয়, তবে শীর্ষের সহিত ঐ বিন্দু সংযোজক সরলরেখা শিরঃকোণকে অন্তর্দ্বিখণ্ডিত বা বহির্দ্বিখণ্ডিত করিবে।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র)

মনে কর, AD ABC ত্রিভুজের BAC কোণকে প্রথম চিত্রে অন্তর্দ্বিখণ্ডিত এবং দ্বিতীয় চিত্রে বহির্দ্বিখণ্ডিত করিল ; অর্থাৎ দ্বিতীয় চিত্রে AD EAC বহিঃকোণকে দ্বিখণ্ডিত করিল। আরও মনে কর, AD BCকে বা বর্ধিত BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BD : DC = BA : AC.

অঙ্কন। C বিন্দু হইতে AD এর সমান্তরাল CF টান, ইহা যেন বর্ধিত AB বা ABকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। এখন DA ও CF সমান্তরাল বলিয়া,

$\angle ACF =$ একান্তর $\angle CAD$

এবং $\angle AFC =$ অনুরূপ $\angle EAD$.

কিন্তু দেওয়া আছে যে, $\angle CAD = \angle EAD$

$\therefore \angle ACF = \angle AFC$

$\therefore AF = AC.$ (উপ ১৭)

আবার, DA CF এর সমান্তরাল বলিয়া ; BD : DC = BA : AF

অর্থাৎ BD : DC = BA : AC.

বিপরীতক্রমে ; মনে কর, ABC ত্রিভুজের BC ভূমি D বিন্দুতে এরূপে অন্তর্বিভক্ত (১ম চিত্র) অথবা বহির্বিভক্ত (২য় চিত্র) হইল যেন BD : DC = BA : AC. AD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD BAC কোণকে প্রথম চিত্রে অন্তর্বিভক্ত বা দ্বিতীয় চিত্রে বহির্বিভক্ত করে অর্থাৎ $\angle$CAD = $\angle$EAD.

প্রমাণ। পূর্বের ন্যায় অঙ্কনকার্য কর।

এখন DA BCF ত্রিভুজের CF বাহুর সমান্তরাল বলিয়া ;

BD : DC = BA : AF (উপ ৫৪)

কিন্তু দেওয়া আছে যে, BD : DC = BA : AC.

$\therefore$ BA : AF = BA : AC

$\therefore$ AF = AC.

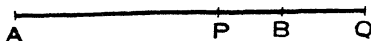
$\therefore$ $\angle$ACF = $\angle$AFC.

কিন্তু DA CF এর সমান্তরাল বলিয়া ;

উভয় চিত্রে, $\angle$CAD = একান্তর $\angle$ACF

এবং $\angle$EAD = অনুরূপ $\angle$AFC

$\therefore$ $\angle$CAD = $\angle$EAD

সংজ্ঞা—যদি কোন সীমাবদ্ধ সরলরেখা একই অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত এবং বহির্বিভক্ত হয় তবে ঐ সরলরেখা **সমঞ্জসভাবে বিভক্ত** (cut harmonically) হইল বলা হয়।

যথা, যদি AP : PB = AQ : QB হয়, তবে AB P ও Q বিন্দুতে সমঞ্জসভাবে বিভক্ত হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের ভূমি শিরঃকোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং বহির্দ্বিখণ্ডক দ্বারা সমঞ্জসভাবে বিভক্ত হইবে।

অনুশীলনী ৩৭

১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ-দ্বিখণ্ডক ভূমিকে দ্বিখণ্ডিত করে।

২। যে ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক ভূমিকে দ্বিখণ্ডিত করে, তাহা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

৩। ABC ত্রিভুজের A কোণের দ্বিখণ্ডক BCকে D বিন্দুতে প্রতিচ্ছেদ করিলে, যদি O BC এর মধ্যবিন্দু হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$OB : OD :: AB + AC : AB - AC.$$

৪। ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ A হইতে অঙ্কিত AX ও AY সরলরেখা BC বা বর্ধিত BCকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি AX ও AY ABএর সহিত সমভাবে নত হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$BX : BY :: CX : CY$$

৫। AB সরলরেখা P ও Q বিন্দুতে সমঞ্জসভাবে বিভক্ত হইলে প্রমাণ কর যে, QP সরলরেখা B ও A বিন্দুতে সমঞ্জসভাবে বিভক্ত হইবে।

৬। ABC ত্রিভুজের BC বাহু D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইলে, যদি ADB, ADC কোণের DE ও DF দ্বিখণ্ডকদ্বয় AB ও ACকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, EF BCএর সমান্তরাল।

৭। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুদ্বয়কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, DE BCএর সমান্তরাল।

৮। ABC ত্রিভুজের B ও C কোণের দ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুদ্বয়কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিলে যদি DE BCএর সমান্তরাল হয়, তবে ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

৯। ABC ত্রিভুজের শিরঃকোণ A এর দ্বিখণ্ডক BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি B কোণের দ্বিখণ্ডক ADকে I বিন্দুতে ছেদ করে তবে প্রমাণ কর যে, $AI : ID :: AB + AC : BC.$

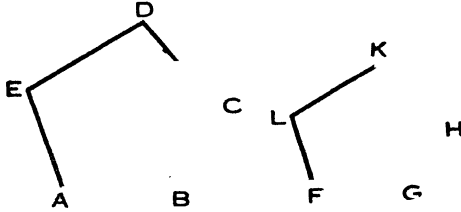
১০। ABCD একটি চতুর্ভুজের A ও C কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় BD কর্ণের উপর প্রতিচ্ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে, B ও D কোণে দ্বিখণ্ডকদ্বয় AC কর্ণের উপর প্রতেচ্ছেদ করিবে।

১১। উপপাদ্য ৫৫ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের তিন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু হইবে।

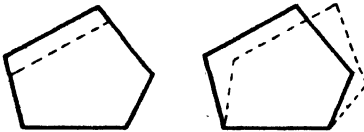
তৃতীয় পরিচ্ছেদ

সদৃশক্ষেত্র

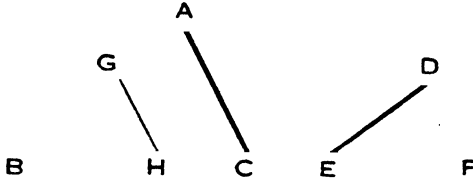
সংজ্ঞা। দুটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের একের সমস্ত কোণ যথাক্রমে অন্যের সমস্ত কোণের সমান হইলে তাহাদিকে **সদৃশকোণ** (Equiangular) ক্ষেত্র বলে, এবং উহাদের সমান সমান কোণ-সংলগ্ন বাহুগুলিকে **অনুরূপ** (Corresponding) বাহু বলে।

দুটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র (১) সদৃশকোণ হইলে এবং (২) উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি আনুপাতিক হইলে উহাদিগকে **সদৃশ** (Similar) বলে।

যেমন, ABCDE ও FGHKL ক্ষেত্র দুটির মধ্যে (১) A, B, C, D ও E কোণ যথাক্রমে F, G, H, K ও L কোণের সমান এবং,

(২) $\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}=\frac{CD}{HK}=\frac{DE}{KL}=\frac{EA}{LF}$ হইলে, তাহারা **সদৃশ** হইবে।

দ্রষ্টব্য। এস্থলে বিশেষ করিয়া লক্ষ্য করিবে যে, তিনের অধিক বাহু বিশিষ্ট যে কোনও দুটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র সদৃশ হইতে হইলে তাহারা (১) সদৃশ কোণ এবং (২) তাহাদের অনুরূপ বাহুগুলি আনুপাতিক এই উভয়ই হইতে হইবে। কারণ, পার্শ্বের চিত্র হইতে স্পষ্টই দেখা যাইবে যে, ঐরূপ ক্ষেত্র সদৃশকোণ হইলেও তাহাদের অনুরূপ বাহুগুলি আনুপাতিক না হইতেও পারে ; আবার অনুরূপ বাহুগুলি আনুপাতিক হইলেও তাহারা সদৃশকোণ না হইতেও পারে। কিন্তু ত্রিভুজের বেলায় তাহারা সদৃশকোণ হইলে অনুরূপ বাহুগুলি আনুপাতিক হইবেই এবং বিপরীতক্রমে অনুরূপ বাহুগুলি আনুপাতিক হইলে তাহারা সদৃশকোণ হইবে। (উপ ৫৬).

উপপাদ্য ৫৬

দুইটি সদৃশকোণ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি আনুপাতিক হইবে।

বিপরীতক্রমে, দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলি আনুপাতিক হইলে, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণ হইবে, এবং অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

মনে কর, ABC, DEF দুটি ত্রিভুজের মধ্যে $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB : DE = BC : EF = CA : FD$.

প্রমাণ। DEF ত্রিভুজটিকে ABC ত্রিভুজের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন E বিন্দু B বিন্দুর উপর পড়ে এবং EF BCএর উপর পড়ে। তাহা হইলে, $\angle E = \angle B$ বলিয়া ; ED BAএর উপর পড়িবে।

মনে কর, ঐরূপে রাখিলে D ও F যথাক্রমে G ও H বিন্দুর উপর পড়িল, সুতরাং GBH DEF ত্রিভুজের নূতন অবস্থান হইল।

সুতরাং, $\angle BGH = \angle EDF = \angle BAC$, দেওয়া আছে।

$\therefore$ GH AC এর সমান্তরাল।

$\therefore$ $BA : BG = BC : BH$. (উপ ৫৪, অনু)

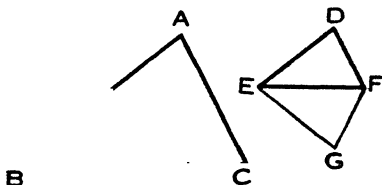
অর্থাৎ, $AB : DE = BC : EF$.

এই প্রকার $\angle F$ C কোণের সহিত মিলিয়া যায় এরূপে DEF ত্রিভুজকে ABC ত্রিভুজের উপর স্থাপন করিয়া দেখান যাইতে পারে যে,

$BC : EF = CA : FD$.

$\therefore$ $AB : DE = BC : EF = CA : FD$.

বিপরীতক্রমে। মনে কর ABC, DEF ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

$$AB : DE = BC : EF = CA : FD.$$

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \text{ এবং } \angle C = \angle F.$$

অঙ্কন। EF রেখার E বিন্দুতে B কোণের সমান FEG কোণ এবং F বিন্দুতে C কোণের সমান EFG কোণ আঁক।

তাহা হইলে, অবশিষ্ট $\angle EGF$, অবশিষ্ট A কোণের সমান হইবে।

প্রমাণ। ABC, GEF ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ বলিয়া,

$AB : GE = BC : EF$ (প্রমাণিত)

কিন্তু দেওয়া আছে যে, $AB : DE = BC : EF$

$\therefore AB : GE = AB : DE$

$\therefore GE = DE.$

সেইরূপ, $GF = DF.$

এখন GEF ও DEF ত্রিভুজের মধ্যে,

যেহেতু $\begin{cases} GE = DE, \\ GF = DF, \\ \text{এবং } EF \text{ সাধারণ ;} \end{cases}$

$\therefore$ GEF, DEF ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

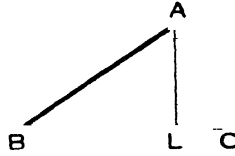
$\therefore \angle G = \angle D,$

$\angle GEF = \angle DEF$

এবং $\angle EFG = EFD.$

অর্থাৎ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F.$

অনুসিদ্ধান্ত। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর পাতিত (১) লম্বের উভয় পার্শ্বের ত্রিভুজ সমস্ত ত্রিভুজের সহিত সদৃশ হইবে এবং উহারা পরস্পর সদৃশ হইবে ;

(২) লম্ব অতিভুজের খণ্ডদ্বয়ের মধ্যকানুপাতিক হইবে।

(১) কারণ, ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ A হইতে অতিভুজ BCএর উপর AL লম্ব হইলে, ABC, LBA ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

$\angle BLA = \angle BAC$; সমকোণ বলিয়া,

এবং $\angle B$ সাধারণ ;

সুতরাং অবশিষ্ট $\angle BAL =$ অবশিষ্ট $\angle ACB$.

$\therefore$ ABC, LBA ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ ; অতএব তাহারা সদৃশ।

এইপ্রকারে দেখান যাইতে পারে যে ABC, LAC ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।

এখন LBA, LAC ত্রিভুজের প্রত্যেকেই ABC ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ বলিয়া ঐ ত্রিভুজ দুটিও সদৃশকোণ ; সুতরাং তাহারা সদৃশ।

(২) LBA, LAC ত্রিভুজ দুটি সদৃশ বলিয়া ;

$LB : LA = LA : LC$;

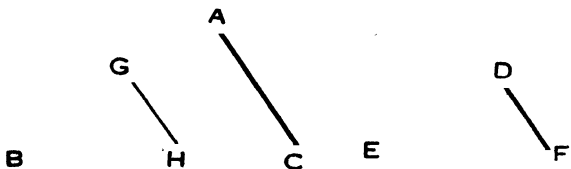
অর্থাৎ AL, LB ও LCএর মধ্যকানুপাতিক ;

সুতরাং $LA^2 = LB.LC$.

সংজ্ঞা

দুটি নির্দিষ্ট বাহু অনুরূপ হইলে, ঐ দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুটি সদৃশ-ক্ষেত্র **সদৃশভাবে অঙ্কিত** (Similarly described) হইল বলা হয়।

উপপাদ্য ৫৭

যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের এক কোণ অন্যের এক কোণের সমান হয় এবং সমান সমান কোণের সংলগ্ন বাহুগুলি আনুপাতিক হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হইবে।

মনে কর ABC, DEF ত্রিভুজ দুটির মধ্যে $\angle B = \angle E$,

এবং $AB : DE = BC : EF$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।

প্রমাণ। DEF ত্রিভুজটিকে ABC ত্রিভুজের উপর এরূপে স্থাপন কর যেন E বিন্দু B বিন্দুর উপর পড়ে এবং EF BCএর উপর পড়ে।

তাহা হইলে, $\angle E$ B কোণের সমান বলিয়া, ED BAএর উপর পড়িবে।

মনে কর, ঐরূপে রাখিলে D ও F যথাক্রমে G ও H বিন্দুর উপর পড়িল, সুতরাং GBH, DEF ত্রিভুজের নূতন অবস্থান হইল।

এখন দেওয়া আছে যে, $AB : DE = BC : EF$

$\therefore \quad AB : GB = BC : BH$

(কারণ, $GB = DE$ এবং $BH = EF$).

অতএব GH ACএর সমান্তরাল (উপ ৫৪, বিপরীত)

$\therefore \quad \angle A = \angle BGH$ এবং $\angle C = \angle BHG$

অর্থাৎ $\angle A = \angle D$ এবং $\angle C = \angle F$

সুতরাং ABC, DEF ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ;

অতএব উহাদের অনুরূপ বাহুগুলিও আনুপাতিক হইবে। (উপ ৫৬)

অর্থাৎ ABC, DEF ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।

অনুশীলনী ৩৮

(লৈখিক এবং সংখ্যামূলক)

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিতে ফল নির্ণয় করিয়া লৈখিক প্রণালীতে ফলের বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করিতে হইবে।

১। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল EF সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল ; এখন

(ক) AB = ২˙৫″, BC = ৪″ এবং AE = ১˙৫″ হইলে, EF = কত ?

(খ) AB = ৩˙২ সেঃ মিঃ, EF = ১˙৫ সেঃ মিঃ, BE = ২˙৪ সেঃ মিঃ হইলে, BC = কত ?

(গ) AE = ১˙৫″, BE = ২˙১″, EF = ১˙৭″ হইলে, BC = কত ?

২। প্রথম উদাহরণের চিত্রে,

(ক) AB = ২˙৭″, AC = ৩˙৬″, AE = ১˙২″ হইলে, AF = কত ?

(খ) AE = ১″, BE = ২˙৫″, AF = ˙৫″ হইলে, AC = কত ?

৩। ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ A হইতে BCএর উপর AD লম্ব, যদি AB = ৩″, AC = ৪″ এবং BC = ৫″ হয়, তবে ADএর দৈর্ঘ্য কত ?

৪। উক্ত উদাহরণে AB = ১৪ সেঃ মিঃ, AC = ১০˙৫ সেঃ মিঃ, BD = ১১˙২ সেঃ মিঃ হইলে, BC এবং ADএর দৈর্ঘ্য কত নির্ণয় কর।

৫। AB ও ACএর উপর যথাক্রমে E ও F দুটি বিন্দু হইলে, যদি

(ক) AE = ১˙৬″, BE = ২″, AF = ১˙২″, CF = ১˙৫″

অথবা (খ) AE = ৩″, AB = ২″, AF = ৪˙৫″, AC = ৩″

অথবা (গ) AB = ৩˙৫″, AE = ২˙৫″, AC = ৪˙২″, AF = ৩″

হয় তবে, BC ও EF সমান্তরাল হইবে।

উল্লিখিত পরিমাণ বিশিষ্ট AB, AC সরলরেখা টানিয়া তাহা হইতে AE, AF অংশ কাট ; ত্রিকোণীর সাহায্যে দেখ BC ও EF সমান্তরাল কি না।

(তত্ত্বীয়)

৬। ত্রিভুজের কোনও দুই বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর অর্ধেক হইবে।

৭। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলে উৎপন্ন চারিটি ত্রিভুজের প্রত্যেকেই মূল ত্রিভুজের সহিত সদৃশ হইবে এবং উহারা পরস্পর সদৃশ হইবে।

৮। ট্রাপিজিয়মের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে একই অনুপাতে বিভক্ত করে।

৯। ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের একটি অন্যটির দ্বিগুণ হইলে উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু প্রত্যেক কর্ণের ত্রিখণ্ডকারক এক বিন্দু হইবে।

১০। ত্রিভুজের ভূমির সমান্তরাল এবং অন্য বাহুদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ যে কোনও সরলরেখাকে শীর্ষগামী মধ্যমা দ্বিখণ্ডিত করিবে।

১১। কোনও এক বিন্দু দিয়া অঙ্কিত তিনটি সরলরেখা দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে যথাক্রমে A, B, C, এবং P, Q, R বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, AB : BC : : PQ : QR.

১২। দুই বৃত্তের কোন সাধারণ স্পর্শক কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে ব্যাসার্ধদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত অথবা বহির্বিভক্ত করিবে।

ইহা হইতে প্রমাণ কর যে, দুই বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখা এবং উহাদের সরল অথবা তির্যক সাধারণ স্পর্শকগুলি সমবিন্দু হইবে।

১৩। দুইটি বৃত্তের কোনও দুই সমান্তরাল ব্যাসার্ধের প্রান্তবিন্দুদ্বয় দিয়া অঙ্কিত সরলরেখা কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে ব্যাসার্ধদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত করিবে।

১৪। ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ A হইতে AD BCএর লম্ব হইলে, প্রমাণ কর যে, (১) $AB^2 = BC.BD$. (২) $CA^2 = CB.CD$ এবং (৩) $BD : CD = AB^2 : CA^2$.

১৫। কোন ত্রিভুজের AB ও CD জ্যা দুইটি P বিন্দুতে (বৃত্তের ভিতরে অথবা বাহিরে) ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে APC, DPB ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ হইবে এবং সুতরাং সদৃশও হইবে।

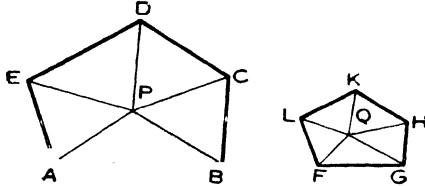
ইহা হইতে দেখাও যে, আয়ত AP.PB = আয়ত CP.PD.

(ইহা উপপাদ্য ৫৩এর বিকল্প প্রমাণ)।

১৬। O-কেন্দ্র বৃত্তের বহিঃস্থ কোনও বিন্দু P হইতে PH, PK বৃত্তের দুটি স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুদ্বয় সংযোজক HK সরলরেখা OPকে Q বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে $OP.OQ = ($ ব্যাসার্ধ $)^2$.

১৭। AB একটি বৃত্তের ব্যাস ; A বিন্দু হইতে অঙ্কিত কোন সরল রেখা পরিধিকে C বিন্দুতে এবং B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শককে D বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, (১) CAB, BAD ত্রিভুজ দুটি সদৃশ এবং (২) AC, AD ও AB এর তৃতীয় আনুপাতিক হইবে।

উপপাদ্য ৫৮

যে কোন দুটি সদৃশ বহুভুজের একটির শীর্ষগুলি কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর সহিত সংযুক্ত করিয়া উহাকে কতিপয় ত্রিভুজে বিভক্ত করিলে অন্যটিও অনুরূপ সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত করা যাইবে।

মনে কর, ABCDE ও FGHKL দুটি সদৃশ বহুভুজের A, B, C, D, E কোণ যথাক্রমে F, G, H, K, L কোণের সমান।

আরও মনে কর, P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু, ABCDE বহুভুজটি যেন, PA, PB, PC...সরলরেখা দ্বারা APB, BPC······ত্রিভুজে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, FGHKL বহুভুজকে অনুরূপ সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত করা যাইবে।

অঙ্কন। FG রেখার F বিন্দুতে PAB কোণের সমান QFG কোণ এবং G বিন্দুতে PBA কোণের সমান QGF কোণ আঁক। তাহা হইলে, ∠HGQ = ∠CBP হইবে। Qএর সহিত H, K ও L বিন্দু সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। APB ও FQG ত্রিভুজের মধ্যে ∠A = ∠F, ∠B = ∠G

অতএব অবশিষ্ট ∠P = অবশিষ্ট ∠Q.

∴ APB, FQG ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ; অতএব তাহারা সদৃশ;

∴ PB : QG = AB : FG

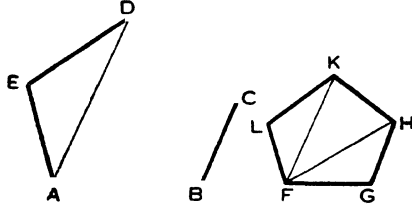
কিন্তু বহুভুজ দুটি সদৃশ বলিয়া, AB : FG = BC : GH.

∴ PB : QG = BC : GH.

এবং ইহারা CBP ও HGQ সমান সমান কোণ সংলগ্ন বাহু বলিয়া;

BPC, GQH ত্রিভুজ দুটি সদৃশ। (উপ ৫৫)

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, CPD DPE, EPA ত্রিভুজগুলি যথাক্রমে HQK, KQL, LQF ত্রিভুজের সহিত সদৃশ।

দ্রষ্টব্য। যদি নির্দিষ্ট P বিন্দুটি বহুভুজের কোন শীর্ষ, মনে কর A এর সহিত মিলিত হয়, তবে নিম্নলিখিতরূপে প্রমাণ করা যাইতে পারে।

প্রমাণ। FH ও FK সংযুক্ত কর।

দেওয়া আছে যে, $\angle ABC = \angle FGH$ এবং $AB : FG = BC : GH$.

$\therefore$ ABC, FGH ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।

সুতরাং $\angle BCA = \angle GHF$; কিন্তু দেওয়া আছে $\angle BCD = \angle GHK$

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ACD =$ অবশিষ্ট $\angle FHK$.

আবার, $AC : FH = BC : GH$; $\triangle^s$ ABC, FGH সদৃশ বলিয়া ;

$= CD : HK$; বহুভুজ দুইটি সদৃশ বলিয়া।

$\therefore$ ACD ও FHK ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হইল।

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে ADE, FKL ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।

অনুশীলনী ৩৯

১। দুটি সদৃশ ত্রিভুজের সমান সমান কোণ হইতে অনুরূপ বাহুর সহিত সমান সমান কোণ করিয়া অঙ্কিত সরলরেখাগুলি দ্বারা ত্রিভুজ দুটি সমসংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে।

২। দুটি সদৃশ ত্রিভুজের প্রত্যেকের শীর্ষগুলি উহার পরিকেন্দ্রের সহিত সংযুক্ত করিলে, ত্রিভুজ দুটি সদৃশভাবে বিভক্ত হইবে।

৩। দুটি সদৃশ চতুর্ভুজ উহাদের কর্ণগুলি দ্বারা সমান সংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে।

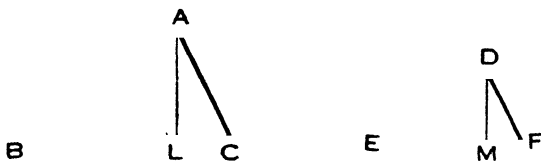
৪। কোন দুটি সদৃশ বহুভুজের সমান সমান কোণ হইতে অনুরূপ বাহুর সহিত সমান সমান কোণ করিয়া অঙ্কিত সরলরেখাগুলি বহুভুজ দুটিকে সদৃশভাবে বিভক্ত করিবে।

৫। দুটি সদৃশ বহুভুজ উহাদের কর্ণগুলিদ্বারা সদৃশভাবে বিভক্ত হইবে।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

সদৃশ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

উপপাদ্য ৫৯

দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত উহাদের কোনও দুইটি অনুরূপ বাহুর বর্গের অনুপাতের সমান।

মনে কর, ABC, DEF দুটি সদৃশ ত্রিভুজের $\angle B = \angle E$ এবং আরও মনে কর, BC ও EF দুটি অনুরূপ বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\triangle ABC : \triangle DEF = BC^2 : EF^2.$$

মনে কর, AL ও DM যথাক্রমে BC ও EFএর উপর লম্ব।

প্রমাণ। $\triangle ABC = \frac{1}{2}BC.AL$

এবং $\triangle DEF = \frac{1}{2}EF.DM.$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2}BC.AL}{\frac{1}{2}EF.DM} = \frac{BC}{EF}.\frac{AL}{DM}.$$

এখন, $\angle ABC = \angle DEF$ এবং $\angle BLA = \angle EMD$; সমকোণ বলিয়া, অতএব ABL, DEM ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ হইল।

$$\therefore \quad AL : DM = AB : DE.$$

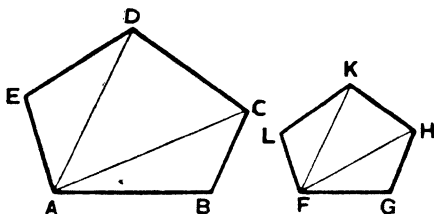
কিন্তু ABC, DEF ত্রিভুজ দুটি সদৃশ বলিয়া,

$$AB : DE = BC : EF$$

$$\therefore \quad AL : DM = BC : EF$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC}{EF}.\frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}.$$

উপপাদ্য ৬০

দুইটি সদৃশ বহুভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত উহাদের কোনও দুইটি অনুরূপ বাহুর বর্গের অনুপাতের সমান।

মনে কর, ABCDE ও FGHKL দুটি সদৃশ বহুভুজ এবং AB ও FG দুটি অনুরূপ বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

ABCDE বহুভুজ : FGHKL বহুভুজ $= AB^2 : FG^2$.

প্রমাণ। AC, AD, FH, FK সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABCDE ও FGHKL বহুভুজ সমান সংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হইল। (উপ ৫৮)

এখন ABC, FGH ত্রিভুজ দুটি সদৃশ বলিয়া,

$\triangle ABC : \triangle FGH = AB^2 : FG^2$. (উপ ৫৯)

সেইরূপ, $\triangle ACD : \triangle FHK = CD^2 : HK^2$

$= AB^2 : FG^2$

এবং $\triangle ADE : \triangle FKL = DE^2 : KL^2$.

$= AB^2 : FG^2$; কারণ, $AB : FG = DE : KL$

$\therefore \quad \dfrac{\triangle ABC}{\triangle FGH} = \dfrac{\triangle ACD}{\triangle FHK} = \dfrac{\triangle ADE}{\triangle FKL}$.

$= \dfrac{\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE}{\triangle FGH + \triangle FHK + \triangle FKL}$.

$= \dfrac{\text{ABCDE বহুভুজ}}{\text{FGHKL বহুভুজ}}$.

$$\therefore \frac{\text{ABCDE বহুভুজ}}{\text{FGHKL বহুভুজ}} = \frac{\triangle ABC}{\triangle FGH} = \frac{AB^2}{FG^2}.$$

অনু ১। দুটি সদৃশক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হইলে উহাদের অনুরূপ বাহুগুলিও পরস্পর সমান হইবে।

অনু ২। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত কোনও ঋজুরেখ ক্ষেত্র, উহার অন্য দুই বাহুর উপর সদৃশভাবে অঙ্কিত সদৃশ ক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

অনুশীলনী ৪০

১। X ও Y যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে, $\triangle AXY : \triangle ABC :: 1 : 4$.

২। ABC ত্রিভুজের AD ও BE মধ্যমা দুটি G বিন্দুতে মিলিত হইল। DE সংযুক্ত করিলে, প্রমাণ কর যে, $\triangle AGB : \triangle DGE :: 4 : 1$।

৩। ABC ত্রিভুজের BC ভূমির সমান্তরাল XY সরলরেখা ABকে $2 : 3$ অনুপাতে বিভক্ত করিল ; AXY ও ABC ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফলের তুলনা কর।

৪। ABC ত্রিভুজের BC ভূমির সমান্তরাল XY সরলরেখা AB ও ACকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিলে,

যদি $\triangle AXY : \triangle ABC = 4 : 9$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, XY AB ও ACকে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করিবে।

৫। ABCD ট্রাপিজিয়মের AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি AB ও CD সমান্তরাল বাহুদুটির মধ্যে AB CDএর দ্বিগুণ হয় তবে AOB, COD ত্রিভুজ দুটির অনুপাত কত নির্ণয় কর।

৬। কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABC একটি ত্রিভুজ ; A বিন্দুতে স্পর্শক বর্ধিত BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে,

$$CD : BD = AC^2 : AB^2.$$

৭। প্রমাণ কর যে, কোন দুটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত উহাদের

(১) অনুরূপ উন্নতিদ্বয়ের ;
(২) অনুরূপ মধ্যমাদ্বয়ের ;
(৩) পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধদ্বয়ের ;
অথবা (৪) অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধদ্বয়ের ;

বর্গের অনুপাতের সমান।

৮। প্রমাণ কর যে. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজ উহার অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজের সমষ্টির সমান।

৯। বর্গক্ষেত্রের কোন বাহুর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজ উহার কর্ণের উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজের অর্ধেক।

১০। প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত প্রণালীতে ABC ত্রিভুজের BC ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টানিয়া উহাকে (১) দুই (২) তিন সমান অংশে বিভক্ত করা যাইতে পারে।

(১) (ত্রিভুজের অন্য কোন বাহু মনে কর) ABকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত আঁক। ABকে P বিন্দু দ্বিখণ্ডিত কর এবং P হইতে ABএর উপর PR লম্ব টান, PR যেন অর্ধবৃত্তটিকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। Aকে কেন্দ্র করিয়া AR ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, চাপটি যেন ABকে X বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে X দিয়া অঙ্কিত BCএর সমান্তরাল সরলরেখা △ABCকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

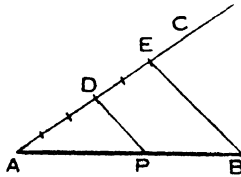
(২) ABকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত আঁক। ABকে ত্রিখণ্ডিত করিয়া ছেদবিন্দু দুটি হইতে ABএর উপর লম্ব টান, ঐ লম্বদুটি যেন অর্ধবৃত্তকে R ও S বিন্দুতে ছেদ করিল। Aকে কেন্দ্র করিয়া AR ও AS ব্যাসার্ধ লইয়া দুটি বৃত্তচাপ আঁক, উহারা যেন ABকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে, X ও Y হইতে অঙ্কিত BCএর সমান্তরাল সরল রেখা △ABCকে ত্রিখণ্ডিত করিবে।

মন্তব্য। উক্ত প্রকারে ত্রিভুজের কোনও বাহুর সমান্তরাল সরল রেখা টানিয়া উহাকে যে কোনও সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করা যাইতে পারে।

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা

সম্পাদ্য ৩০

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোনও নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে।

মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং $m : n$ নির্দিষ্ট অনুপাত।
AB কে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ABএর সহিত কোনও কোণ করিয়া AC সরলরেখা টান।
AC হইতে $(m+n)$ সমান অংশ ছেদ কর।

মনে কর, ADএর মধ্যে ঐরূপ m অংশ আছে এবং DEএর মধ্যে অবশিষ্ট n অংশ আছে।

স্থতরাং AD : DE $= m : n$.

EB সংযুক্ত কর।

D হইতে EDএর সমান্তরাল DP টান, ইহা যেন ABএর সহিত P বিন্দুতে মিলিত হইল।

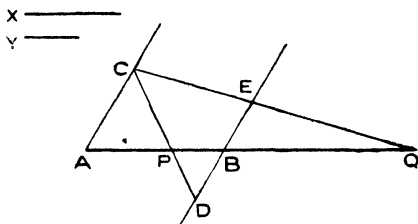
তাহা হইলে, P বিন্দুতে AB $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইল।

কারণ, DP ABE ত্রিভুজের BE বাহুর সমান্তরাল বলিয়া,

AP : PB = AD : DE $= m : n$.

দ্রষ্টব্য। DE বর্ধিত AD হইতে না লইয়া যদি DA হইতে লওয়া হইত, তবে AB $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হইত।

সম্পাদ্য ৩১

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোন নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করিতে হইবে।

মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। আরও মনে কর, X ও Y সরলরেখা দুটির অনুপাত নির্দিষ্ট অনুপাতের সমান।

ABকে X : Y অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A ও B হইতে যথাক্রমে AC ও DBE যে কোন দুটি সমান্তরাল সরলরেখা টান।

AC হইতে Xএর সমান AC অংশ কাট এবং DBE হইতে বিপরীত দিকে BE ও BD অংশ ছেদ কর, যেন BE = BD = Y হয়।

CD, CE সংযুক্ত কর।

মনে কর, CD ও বর্ধিত CE AB ও বর্ধিত ABকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, AB রেখা X : Y অনুপাতে P বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত এবং Q বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হইল।

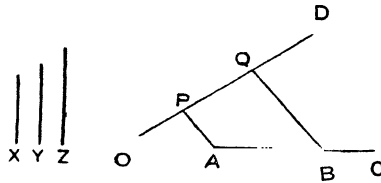
কারণ, APC, BPD ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ বলিয়া,

$$AP : PB = AC : DB$$
$$= X : Y.$$

সেইরূপ, AQC ও BQE ত্রিভুজ দুটি সদৃশ বলিয়া,

$$AQ : BQ = AC : BE$$
$$= X : Y.$$

সম্পাদ্য ৩২

তিনটি নির্দিষ্ট সরলরেখার চতুর্থ আনুপাতিক নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, X, Y, Z তিনটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, ইহাদের চতুর্থ আনুপাতিক নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন। যে কোনও COD কোণ আঁক।

OD হইতে X ও Yএর সমান যথাক্রমে OP, PQ অংশ লও।

OC হইতে Zএর সমান OA অংশ লও।

PA সংযুক্ত কর।

PAএর সমান্তরাল QB সরলরেখা টান, ইহা যেন OCকে B বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, AB নির্ণেয় চতুর্থ আনুপাতিক হইল।

প্রমাণ। কারণ, PA OQB ত্রিভুজের QB বাহুর সমান্তরাল বলিয়া,

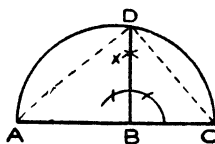
$$OP : PQ :: OA : AB$$

কিন্তু $OP = X$, $PQ = Y$ এবং $OA = Z$.

$$\therefore \quad X : Y :: Z : AB.$$

অনুসিদ্ধান্ত। দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখা (মনে কর X, Y) এর তৃতীয় আনুপাতিক নির্ণয় করিতে হইলে, উল্লিখিতরূপ কার্য কর এবং $Z = Y$ লও।

সম্পাদ্য ৩৩

দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্যকানুপাতিক নির্ণয় করিতে হইবে।

X

মনে কর, AB, BC দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, ইহাদের মধ্যকানুপাতিক নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB ও BCকে একই সরলরেখায় অবস্থিত হয় এরূপে রাখ।

AC এর উপর একটি অর্ধবৃত্ত আঁক। B হইতে ACএর উপর BD লম্ব টান, ইহা যেন অর্ধবৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে BD নির্ণেয় মধ্যকানুপাতিক হইল।

প্রমাণ। AD, DC সংযুক্ত কর।

এখন ADC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর AB লম্ব বলিয়া ;

BDA, BCD ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।

∴ AB : BD :: BD : BC. (উপ ৫৬, অনু)

দ্রষ্টব্য। ইহা হইতে লৈখিক প্রণালীতে বর্গমূল নির্ণয় করিবার নিয়ম পাওয়া যায়।

কারণ, AB : BD :: BD : BC বলিয়া,

$$BD^2 = AB.BC$$

$$\therefore \quad BD = \sqrt{AB.BC}.$$

উদা। লৈখিক নিয়মে $\sqrt{১৩}$ এর মান নির্ণয় কর।

এস্থলে ১৩ = ১ × ১৩।

∴ $\sqrt{১৩}$ = ১ এবং ১৩ এর মধ্যকানুপাতিক।

∴ ১ এবং ১৩ এর মধ্যকানুপাতিক নির্ণয় করিলেই নির্ণয়ে বর্গমূল পাইবে।

অনুশীলনী ৪১

১। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে ৩ : ৪ : ৫ এই আনুপাতিকভাবে তিন খণ্ডে বিভক্ত কর।

২। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে $p : q : r : s$ এই আনুপাতিক ভাবে চারি খণ্ডে বিভক্ত কর।

৩। কোন ত্রিভুজের পরিসীমা নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যেন উহার বাহু তিনটি p, q ও r এর আনুপাতিক হয়।

৪। লৈখিক প্রণালীতে $\sqrt{২}$ এবং $\sqrt{৮০}$ এর মান নির্ণয় কর।

৫। লৈখিক প্রণালীতে $\frac{৫ \times ৬}{২}$ এর মান নির্ণয় কর।

৬। লৈখিক প্রণালীতে দেখাও যে, $৬^২ = ৩ \times ১২$।

৭। 'a' ইঞ্চি দীর্ঘ একটি সরলরেখা দেওয়া আছে ; a^2 ইঞ্চি দীর্ঘ একটি সরলরেখা আঁক।

৮। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমন দুই খণ্ডে বিভক্ত কর যেন উহাদের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অনুপাত কোন নির্দিষ্ট অনুপাতের সমান হয়।

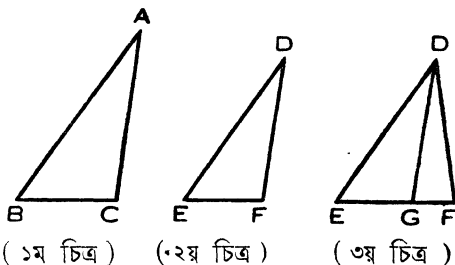
৯। A, B, C তিনটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইলে, এমন একটি সরল রেখা X নির্ণয় কর যেন, $A^2 : B^2 :: C : X$ হয়।

১০। দুটি সরলরেখার সমষ্টি এবং উহাদের মধ্যকানুপাতিক রেখার পরিমাণ দেওয়া আছে, রেখা দুটি অঙ্কিত কর।

বিবিধ প্রতিজ্ঞা

১। যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের এক কোণ অন্যের এক কোণের সমান হয় এবং একের অপর এক কোণের সংলগ্ন দুই বাহু অন্যের অপর এক কোণের সংলগ্ন দুই বাহুর আনুপাতিক

হয় তবে উহাদের অবশিষ্ট কোণ দুইটি পরস্পর সমান অথবা সম্পূরক হইবে, এবং প্রথম স্থলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হইবে।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র) (৩য় চিত্র)

মনে কর, ABC, DEF দুটি ত্রিভুজের মধ্যে $\angle B = \angle E$ এবং A ও D কোণ সংলগ্ন বাহুগুলি আনুপাতিক অর্থাৎ $AB : DE = AC : DF$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) $\angle ACB = \angle DFE$ এবং ABC, DEF ত্রিভুজ দুটি সদৃশ,

অথবা, (২) ACB, DFE কোণ দুটি পরস্পর সম্পূরক।

প্রমাণ। A ও D কোণ দুটি হয় সমান, না হয় অসমান হইবে।

(১) যদি $\angle A = \angle D$ হয়, (১ম ও ২য় চিত্র)

তবে $\angle ABC = \angle DFE$ হইবে,

তাহা হইলে ABC, DEF ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ হইবে ; স্থতরাং উহারা সদৃশ (উপ ৫৬)

(২) A ও D কোণ দুটি অসমান হইলে, (যেমন ১ম ও ৩য় চিত্রে),

মনে কর, $\angle D$ $\angle A$ অপেক্ষা বড় ; EDF কোণ হইতে A কোণের সমান EDG কোণ কাট। DG যেন EF কে G বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, $\angle DGE = \angle ACB$;

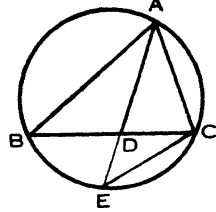
এখন ABC, DEG ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ হইল ;

$\therefore \quad AB : DE = AC : DG$ (উপ ৫৬)

কিন্তু দেওয়া আছে যে, $AB : DE = AC : DF$

$\therefore \quad AC : DG = AC : DF$; $\therefore \quad DG = DF$

$\therefore \quad \angle DFG = \angle DGF$, কিন্তু $\angle ACB = \angle DGE =$ DGF কোণের সম্পূরক = DFG কোণের সম্পূরক।

২। ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক ভূমিকে ছেদ করিলে, উহার অন্য দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ভূমির খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র এবং ঐ দ্বিখণ্ডকের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হইবে।

মনে কর, AD সরলরেখা ABC ত্রিভুজের BAC শিরঃকোণকে দ্বিখণ্ডিত করিল এবং BC ভূমিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

আয়ত AB.AC = আয়ত BD.DC + ADএর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র।

মনে কর, একটি বৃত্ত ABC ত্রিভুজের উপর পরিলিখিত হইল এবং ইহা বর্ধিত ADকে E বিন্দুতে ছেদ করিল ; CE সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। BAD ও EAC ত্রিভুজ দুটির মধ্যে,

দেওয়া আছে যে, $\angle BAD = \angle EAC$,

এবং $\angle ABD = \angle AEC$, একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া,

অতএব, BAD, EAC ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ।

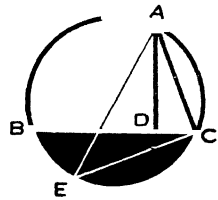
$\therefore \quad BA : AD = EA : AC$

$\therefore \quad BA.AC = AD.EA$

$= AD.DE + AD^2$ (উপ ৪৬)

$= BD.DC + AD^2$ কারণ, $AD.DE = BD.DC$.

অর্থাৎ আয়ত BA.AC = আয়ত BD.DC + AD এর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র।

৩। * ত্রিভুজের শিরঃকোণ হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে, উহার অন্য দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ লম্ব এবং ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসের অন্তর্গত আয়ত ক্ষেত্রের সমান হইবে।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজের শিরঃকোণ A হইতে AD BCএর উপর লম্ব। আরও মনে কর, AE ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের একটি ব্যাস।

* ইহা ব্রহ্মগুপ্ত (জন্ম ৬২৮ খৃষ্টাব্দ) প্রদত্ত প্রতিজ্ঞা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, আয়ত AB.AC = আয়ত AD.AE.

প্রমাণ। CE সংযুক্ত কর।

এখন BAD, EAC ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

∠ABD = ∠AEC ; একই বৃত্তাংশস্থ কোণ বলিয়া,

এবং ∠BDA = ∠ECA ; সমকোণ বলিয়া।

∴ BAD, EAC ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ।

∴ BA : AD = EA : AC

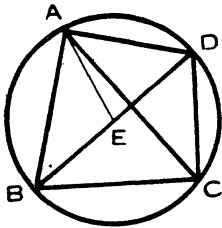
∴ আয়ত BA.AC = আয়ত AD.EA.

দ্রষ্টব্য। এই প্রতিজ্ঞা হইতে ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করিবার নিয়ম পাওয়া যায়। কারণ, ABC ত্রিভুজের বাহুর পরিমাণ যথাক্রমে a, b, c এবং p = লম্ব AD ও R পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ হইলে,

যেহেতু, আয়ত BA.AC = আয়ত AD.AE.

$$\therefore \quad cb = p.2\text{R} \qquad \therefore \quad \text{R} = \frac{cb}{2p} = \frac{abc}{2ap} = \frac{abc}{4\Delta}.$$

৪। কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র উহার বিপরীত বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র দুটির **সমষ্টির** সমান।

A D E B C

মনে কর, ABCD একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ এবং AC, BD ইহার কর্ণদ্বয়।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

আয়ত AC.BD = আয়ত AB.CD + আয়ত BC.AD.

CAD কোণের সমান করিয়া BAE কোণ আঁক ; AE যেন BDকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। BAE, CAD ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

∠ABE = ∠ACD ; একই বৃত্তাংশস্থ কোণ বলিয়া,

এবং ∠BAE = ∠CAD.

∴ BAE, CAD ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ।

$\therefore$ $AB : AC = BE : CD$

$\therefore$ $AB.CD = AC.BE$ ... (১)

আবার, BAC, EAD ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

$\angle BCA = \angle EDA$; একই বৃত্তাংশস্থ কোণ বলিয়া,

এবং $\angle BAC = \angle BAE + \angle EAC$

$= \angle CAD + \angle EAC = \angle EAD.$

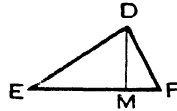
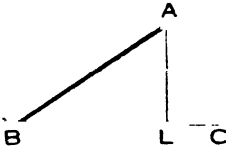
$\therefore$ BAC, EAD ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ হইল।

$\therefore$ $BC : ED = CA : DA$

$\therefore$ $BC.AD = AC.ED.$ ... (২)

(১) এবং (২) হইতে, যোগ করিয়া,

$$AB.CD + BC.AD = AC.BE + AC.ED$$
$$= AC.(BE + ED) = AC.BD.$$

৫। **দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের এক কোণ অন্যের এক কোণের সমান হইলে, উহাদের ক্ষেত্রফল ঐ সমান সমান কোণ সংলগ্ন বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের আনুপাতিক হইবে।**

মনে কর ABC, DEF দুটি ত্রিভুজ, ইহাদের মধ্যে $\angle B = \angle E$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\triangle ABC : \triangle DEF = AB.BC : DE.EF$$

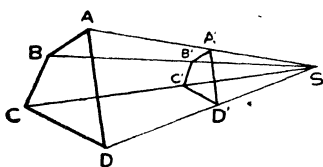
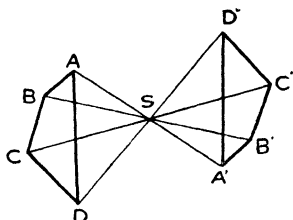
মনে কর AL, DM যথাক্রমে BC ও EFএর উপর লম্ব।

প্রমাণ। $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \dfrac{\frac{1}{2}BC.AL}{\frac{1}{2}EF.DM} = \dfrac{BC.AL}{EF.DM}.$

কিন্তু ABL ও DEM ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ বলিয়া,

$$AL : DM = AB : DE$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AB}{DE} = \frac{AB.BC}{EF.DE}.$$

৬। কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর সহিত কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের শীর্ষ-সমূহ সংযোজক সরলরেখাগুলি একই অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত অথবা বহির্বিভক্ত করিয়া ঐ ছেদবিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলে যে ঋজুরেখ ক্ষেত্র উৎপন্ন হয় উহার বাহু প্রথমোক্ত ঋজুরেখক্ষেত্রের অনুরূপ বাহুর সমান্তরাল হইবে এবং উহা ঐ ক্ষেত্রের সহিত সদৃশ হইবে।

১ম চিত্র ২য় চিত্র

মনে কর, ABCD একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র এবং S একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। আরও মনে কর AS, BS, CS ও DS যথাক্রমে A′, B′, C′ ও D′ বিন্দুতে একই অনুপাতে (১ম চিত্রে) অন্তর্বিভক্ত অথবা (২য় চিত্রে) বহির্বিভক্ত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) A′B′C′D′ ক্ষেত্রের বাহু ABCD ক্ষেত্রের অনুরূপ বাহুর সমান্তরাল এবং (২) A′B′C′D′ ক্ষেত্র ABCD ক্ষেত্রের সহিত সদৃশ।

প্রমাণ। (১) দেওয়া আছে যে, $SA' : AA' = SB' : BB'$.

∴ A′B′ ও AB সমান্তরাল (উপ ৫৪)

এই প্রকারে দেখান যাইতে পারে যে, B′C′, C′D′, D′A′ যথাক্রমে BC, CD ও DAএর সমান্তরাল।

(২) D′A′ ও A′B′ যথাক্রমে DA ও ABএর সমান্তরাল বলিয়া, উভয় চিত্রে, $\angle D'A'B' = \angle DAB$ (উপ ১১ অনু).

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, A′B′C′, B′C′D′, C′D′A′ কোণগুলি যথাক্রমে ABC, BCD, CDA কোণগুলির সমান।

অতএব, A′B′C′D′ ও ABCD ক্ষেত্র দুইটি সদৃশকোণ।

আবার, SA′B′, SAB ত্রিভুজ তুটি সদৃশকোণ বলিয়া,

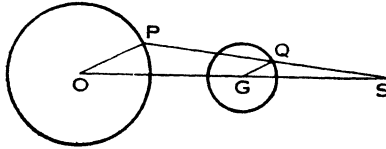
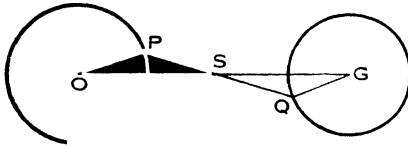
$$A'B' : AB = SA' : SA$$

সেইরূপ, $D'A' : DA = SA' : SA$

$$\therefore\quad A'B' : AB = D'A' : DA.$$

এই প্রকারে দেখান যাইতে পারে যে, কোনও সমান সমান কোণসংলগ্ন বাহুগুলি আনুপাতিক।

অতএব, ক্ষেত্র তুইটি সদৃশ।

৭। তুটি নির্দিষ্ট বৃত্তের যে কোনও তুই সমান্তরাল ব্যাসার্ধের প্রান্তবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক রেখাকে তুই নির্দিষ্ট বিন্দুর কোনও একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে।

প্রথম চিত্র

দ্বিতীয় চিত্র

মনে কর, O ও G তুটি নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এবং OP, GQ যে কোন তুই সমান্তরাল ব্যাসার্ধ (১ম চিত্রে একই দিকে এবং ২য় চিত্রে বিপরীত দিকে প্রসারিত)। আরও মনে কর, PQ OGকে S বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OP ও GQএর সকল অবস্থানের জন্যই S, তুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর এক বিন্দু হইবে।

প্রমাণ। SOP, SGQ ত্রিভুজ তুটি সদৃশকোণ বলিয়া,

$$OS : SG = OP : GQ.$$

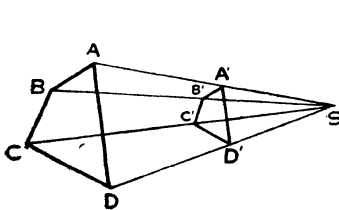
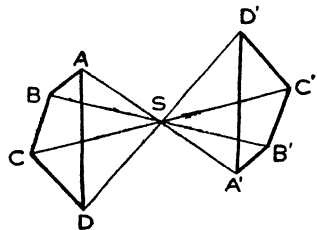
∴ S একটি নির্দিষ্ট বিন্দু, ইহা OGকে OP : GQ বা ব্যাসার্ধদ্বয়ের অনুপাতে প্রথম চিত্রে বহির্বিভক্ত এবং দ্বিতীয় চিত্রে অন্তর্বিভক্ত করে ; এবং ইহা OP ও GQএর সকল অবস্থানের জন্যই সত্য হইবে।

সংজ্ঞা

দুটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে যে দুই বিন্দু উহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত এবং বহির্বিভক্ত করে তাহাদিগকে ঐ বৃত্তদ্বয়ের **সাম্য কেন্দ্র** (centre of similitude) বলে।

অনু। দুটি বৃত্তের যে কোন সাধারণ স্পর্শক উহাদের সাম্য কেন্দ্র-দ্বয়ের কোন একটি দিয়া যাইবে।

কারণ, প্রত্যেক সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু সংযোজক ব্যাসার্ধ দুটি সমান্তরাল।

৮। **দুটি সদৃশ ক্ষেত্রের অনুরূপ বাহুগুলি সমান্তরাল হইলে উহাদের অনুরূপ শীর্ষ সংযোজক সরলরেখাগুলি একই বিন্দুতে মিলিত হইবে।**

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র)

মনে কর, ABCD, A′B′C′D′ দুটি সদৃশক্ষেত্র, উহাদের মধ্যে AB, BC, CD, DA বাহু যথাক্রমে A′B′, B′C′, C′D′, D′A′ বাহুর সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

AA′, BB′, CC′, DD′ সরলরেখাগুলি একই বিন্দুতে মিলিত হইবে।

প্রমাণ। মনে কর, AA′, BB′ (আবশ্যক হইলে বর্ধিত হইয়া) S বিন্দুতে মিলিত হইল।

এখন AB ও A′B′ সমান্তরাল বলিয়া, SAB, SA′B′ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণ হইল।

∴ SB : SB′ = AB : A′B′ [উপ ৫৬)

∴ AA′ BB′কে AB : A′B′ অনুপাতে ১ম চিত্রে বহির্বিভক্ত এবং ২য় চিত্রে অন্তর্বিভক্ত করিল।

সেই প্রকারে দেখান যাইতে পারে যে, CC′ BB′কে BC : B′C′ অনুপাতে বিভক্ত করে।

কিন্তু ক্ষেত্র দুটি সদৃশ বলিয়া, BC : B′C′ = AB : A′B′.

∴ AA′ ও CC′ BB′কে একই অনুপাতে S বিন্দুতে বিভক্ত করে। সুতরাং AA′, BB′ CC′ একই S বিন্দুতে মিলিত হয়।

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, BB′, CC′, DD′ একই S বিন্দুতে মিলিত হয়।

∴ AA′, BB′, CC′, DD′ একই বিন্দুতে মিলিত হইল।

অনু ১। S বিন্দু হইতে অনুরূপ শীর্ষগুলির দূরত্ব অনুরূপ বাহুর আনুপাতিক হইবে।

কারণ, SB : SB′ = AB : A′B′ = BC : B′C′.

অনু ২। S হইতে কোন সরলরেখা কোনও অনুরূপ দুই বাহুকে P ও P′ বিন্দুতে ছেদ করিলে SP : SP′ নিয়তই এক হইবে।

কারণ, SP : SP′ যে কোন অনুরূপ দুই বাহুর অনুপাতের সমান হইবে।

দ্রষ্টব্য। S বিন্দুকে ঐ দুই ক্ষেত্রের **সাদৃশ্য কেন্দ্র** (centre of similarity) বলে।

ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ

নিয়মাধীন বৃত্ত অঙ্কন

১। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা তুটি নির্দিষ্ট বিন্দু A ও B দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা XYকে স্পর্শ করিবে।

অঙ্কন। AB সংযুক্ত কর এবং BA বর্ধিত করিয়া XYকে P বিন্দুতে ছেদ কর। A ও B দিয়া যে কোন একটি বৃত্ত আঁকিয়া P হইতে উহার PT স্পর্শক টান।

XY হইতে PTএর সমান PQ অংশ ছেদ কর।

এখন A, B ও Q দিয়া একটি বৃত্ত আঁক ;

ইহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

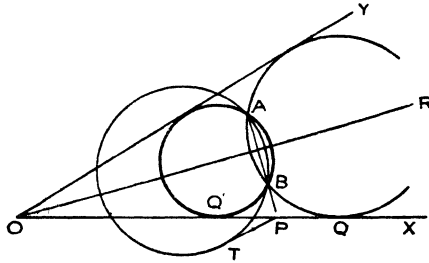
প্রমাণ। কারণ, $PQ^2 = PT^2 = AP.PB.$

$\therefore$ PQ ABC বৃত্তকে স্পর্শ করে।

মন্তব্য। P বিন্দুর উভয় পার্শ্বে হইতেই PQ অংশ ছেদ করা যাইতে পারে বলিয়া, এস্থলে তুইটি উদ্দিষ্ট পাওয়া যাইবে (উপরের চিত্র দেখ)।

দ্রষ্টব্য ১। A ও B সংযোজক সরলরেখা XYএর সমান্তরাল হইলে উল্লিখিত অঙ্কনপ্রণালী খাটিবে না। ঐ ক্ষেত্রে ABএর লম্ব দ্বিখণ্ডক টানিলে যেন উহা XYকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন A, B ও Q দিয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

দ্রষ্টব্য ২। নির্দিষ্ট A ও B বিন্দু XYএর বিপরীত পার্শ্বে হইলে বৃত্ত অঙ্কন অসম্ভব হইবে।

২। **এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু A দিয়া যাইবে এবং দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা OX ও OYকে স্পর্শ করিবে।**

বিশ্লেষণ। মনে কর OR XOY কোণের দ্বিখণ্ডক। এখন উদ্দিষ্ট বৃত্ত OX ও OYকে স্পর্শ করে বলিয়া উহার কেন্দ্র ORএর উপর থাকিবে। আবার, উহা A বিন্দু দিয়া যায় বলিয়া ORএর যে পার্শ্বে A আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে Aএর বিম্ব B লইলে উহা B দিয়াও যাইবে। অতএব,

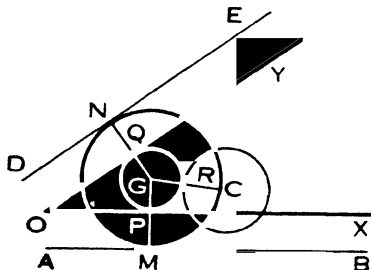
অঙ্কন। XOY কোণকে OR দ্বারা দ্বিখণ্ডিত কর। ORএর যে পার্শ্বে A আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে Aএর বিম্ব B লও।

এখন প্রথম উদাহরণের প্রণালী অনুযায়ী A ও B দিয়া যায়, এবং (OX ও OYএর যে কোন একটিকে, মনে কর) OXকে স্পর্শ করে এরূপ একটি বৃত্ত আঁক।

ঐ বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

মন্তব্য। এস্থলে চিত্রে প্রদর্শিত দুটি উদ্দিষ্ট বৃত্ত পাওয়া যাইবে।

দ্রষ্টব্য। এখানে লক্ষ্য করিবে যে, দুটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের যে কোণের মধ্যে নির্দিষ্ট বিন্দুটি আছে সেই কোণকেই দ্বিখণ্ডিত করা হইয়াছে।

৩। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা OX, OY এবং একটি নির্দিষ্ট C-কেন্দ্র বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

বিশ্লেষণ। মনে কর, PQR উদ্দিষ্ট বৃত্ত ; G ইহার কেন্দ্র এবং ইহা OX, OZ এবং C-কেন্দ্র বৃত্তকে যথাক্রমে P, Q ও R বিন্দুতে স্পর্শ করিল। সুতরাং GP ও GQ যথাক্রমে OX ও OYএর উপর লম্ব এবং G, R, C একই সরলরেখায় অবস্থিত। GP ও GQ কে যথাক্রমে M ও N পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন PM = QN = RC হয়। M ও N দিয়া যথাক্রমে AB ও DE রেখা OX ও OY এর সমান্তরাল করিয়া টান।

এখন GM = GN = GC বলিয়া, M, N ও C দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত AB ও DEকে স্পর্শ করিবে। অতএব,

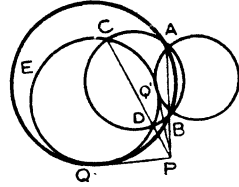
অঙ্কন। XOY কোণের বাহিরে, OX ও OY হইতে নির্দিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ পরিমাণ দূরে উহাদের সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে AB ও DE রেখা টান।

এখন উল্লিখিত ২য় উদাহরণ অনুযায়ী এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা C দিয়া যাইবে এবং AB ও DEকে স্পর্শ করিবে। মনে কর G ঐ বৃত্তের কেন্দ্র। উহা যেন AB ও DEকে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে স্পর্শ করিল। GM সংযুক্ত কর ; GM যেন OXকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, Gকে কেন্দ্র করিয়া GP ব্যাসার্ধ হইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

মন্তব্য। যেহেতু C বিন্দু দিয়া এমন দুইটি বৃত্ত আঁকা যায় যাহা AB ও DEকে স্পর্শ করিবে, অতএব এস্থলেও দুইটি উদ্দিষ্ট বৃত্ত পাওয়া যাইবে।

৪। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু A, B দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত CDEকে স্পর্শ করিবে।

বিশ্লেষণ। মনে কর A, B দিয়া উদ্দিষ্ট বৃত্ত CDE বৃত্তকে Q বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করিল।

Q বিন্দুতে উহাদের সাধারণ স্পর্শক টানিলে, উহা যেন বর্ধিত ABকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। P বিন্দু দিয়া নির্দিষ্ট CDE বৃত্তের CD জ্যা টান।

তাহা হইলে, $AP.PB = PQ^2 = CP.PD$ বলিয়া,

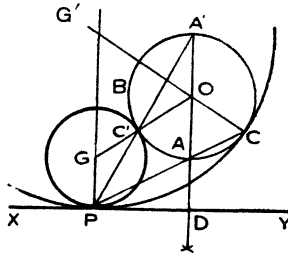
A, B, C, D একই পরিধিস্থ হইবে। অতএব

অঙ্কন। A, B দিয়া যে কোন একটি বৃত্ত আঁক, উহা যেন CDE বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB ও CD বর্ধিত করিলে উহারা যেন P বিন্দুতে ছেদ করিল। P হইতে নির্দিষ্ট CDE বৃত্তের PQ স্পর্শক টান; Q স্পর্শবিন্দু।

এখন, A, B ও Q দিয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

মন্তব্য। P বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট বৃত্তের দুটি স্পর্শক টানা যাইবে বলিয়া এস্থলে দুটি উদ্দিষ্ট বৃত্ত পাওয়া যাইবে।

৫। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত ABCকে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা XYকে উহার এক নির্দিষ্ট P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

অঙ্কন। মনে কর, O নির্দিষ্ট ABC বৃত্তের কেন্দ্র; O হইতে XYএর

উপর OD লম্ব টান, OD যেন ABCকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। P হইতে XYএর উপর PG লম্ব টান, PA সংযুক্ত কর, PA (আবশ্যক হইলে বর্ধিত হইয়া) যেন ABC বৃত্তকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। OC সংযুক্ত কর; OC বর্ধিত হইলে যেন PGকে G′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, G′কে কেন্দ্র করিয়া G′C ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। $\angle GPA =$ অনুরূপ $\angle OAC = \angle OCA$; $\because OA = OC$.

$\therefore G'C = G'P$; সুতরাং G′কে কেন্দ্র করিয়া G′C ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত P দিয়া যাইবে।

আবার G′P XYএর উপর লম্ব বলিয়া, ঐ বৃত্ত XYকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

মন্তব্য। OD বর্ধিত হইলে ABC বৃত্তকে অপর A′ বিন্দুতে ছেদ করিবে, এবং PA′ সংযুক্ত করিলে উহা ঐ বৃত্তকে C′ বিন্দুতে ছেদ করিবে। বর্ধিত C′ PGকে G বিন্দুতে ছেদ করিলে Gকে কেন্দ্র করিয়া GC′ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তও আর একটি উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

৬। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু A দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা XYকে ও একটি নির্দিষ্ট O-কেন্দ্র বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

বিশ্লেষণ। মনে কর, উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র G ; উহা নির্দিষ্ট O-কেন্দ্র বৃত্তকে D বিন্দুতে এবং নির্দিষ্ট XY রেখাকে C বিন্দুতে স্পর্শ করিল।

সুতরাং G, D, O একরেখীয় হইল। CD বর্ধিত করিলে উহা নির্দিষ্ট

বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করিল; PO বর্ধিত হইয়া ঐ বৃত্তকে Q বিন্দুতে এবং XYকে R বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন $\angle GCD = \angle GDC = \angle ODP = \angle DPO$.

$\therefore$ GC ও PO (বা PR) সমান্তরাল।

এবং GC XYএর লম্ব বলিয়া, PR XYএর উপর লম্ব।

PA সংযুক্ত কর, PA বা বর্ধিত PA যেন উদ্দিষ্ট বৃত্তকে B বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, $PA.PB = PC.PD$.

কিন্তু $\angle QDP =$ ১ সম $\angle$; অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া,

$\therefore$ $\angle CDQ =$ এক সমকোণ।

আবার CRQ কোণও সমকোণ বলিয়া, C, R, Q, D এক পরিধিস্থ।

$\therefore$ $PR.PQ = PC.PD$

$= PA.PB.$

অতএব A, B, R, Q একই পরিধিস্থ। (উপ ৫৩, বিপরীত)

অতএব অঙ্কনের এই পন্থা স্থির হয় যে—

অঙ্কন। O হইতে XYএর উপর OR লম্ব টান, উহা যেন নির্দিষ্ট বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। AP সংযুক্ত কর। A, Q, R দিয়া একটি বৃত্ত আঁক, এই বৃত্ত যেন PA বা বর্ধিত PAকে B বিন্দু ছেদ করিল। এখন (৩১ম উদাহরণে প্রদর্শিত প্রণালীতে) A ও B বিন্দু দিয়া এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা, XYকে স্পর্শ করিবে। এই বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

মন্তব্য। A ও B দিয়া যাইবে এবং XYকে স্পর্শ করিবে এমন ছুটি বৃত্ত আঁকা যায় বলিয়া, এস্থলেও ছুটি উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে। সেইরূপ QA সংযুক্ত করিয়া অনুরূপ কার্য করিলে আরও ছুটি উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে। অতএব এস্থলে মোট চারিটি উদ্দিষ্ট বৃত্ত পাওয়া যাইবে।

বিবিধ অনুশীলনী ৫

১। AOB, COD ছুটি সরলরেখা O বিন্দুতে পরস্পর এরূপে ছেদ করিল যেন AO : OB :: CO : OD ; P ও Q যথাক্রমে AB ও CDএর মধ্যবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে, PQ AC এবং BDএর সমান্তরাল।

২। ABC ত্রিভুজের BC ভূমির অন্তঃস্থ P একটি বিন্দু; P হইতে AB ও ACএর সমান্তরাল রেখা টানিলে যে সামান্তরিক উৎপন্ন হইবে উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু, Pএর সকল অবস্থানের জন্যই একটি নির্দিষ্ট সরল রেখায় থাকিবে।

৩। একই ভূমি ABএর উপর উহার একই পার্শ্বে ACB, ADB দুটি পরস্পর সমান ত্রিভুজ; যদি AC ও BD এর ছেদবিন্দু O দিয়া DA এবং CBএর সমান্তরাল সরলরেখা ভূমিকে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, AE = BF.

৪। D, ABC ত্রিভুজের AC বাহুর অন্তঃস্থ একটি বিন্দু; E, F, G ও H যথাক্রমে AD, DC, AB এবং BCএর মধ্যবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে, EG HFএর সমান হইবে।

৫। দুটি সদৃশ ত্রিভুজের কোনও দুই অনুরূপ শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্ব p ও p' উহাদের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R ও R′; এবং উহাদের অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ r ও r' হইলে, দেখাও যে, $p : p'$, R : R′ এবং $r : r'$এর প্রত্যেকে যে কোনও দুই অনুরূপ বাহুর অনুপাতের সমান।

৬। ABC, কোনও বৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি ত্রিভুজ; A দিয়া B ও C বিন্দুতে ঐ বৃত্তের স্পর্শকের সমান্তরাল রেখা BC ভূমির সহিত যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে মিলিত হইলে, দেখাও যে, AD = AE,

এবং $BD : CE = AB^2 : AC^2$.

৭। কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুটি যথাক্রমে B ও Dএর দিকে বর্ধিত হইয়া E বিন্দুতে মিলিত হইল; E দিয়া ADএর সমান্তরাল রেখা বর্ধিত CBএর সহিত F বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে, FE FB ও FCএর মধ্যকানুপাতিক হইবে।

৮। ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ A হইতে BCএর উপর AD লম্ব হইলে, দেখাও যে,

(১) $BC : BD :: BC^2 : BA^2$.

(২) $BC : CD :: BC^2 : CA^2$.

ইহা হইতে উপপাদ্য ৫০ সপ্রমাণ কর।

৯। ABC একটি ত্রিভুজ, AX সরলরেখা BCএর সহিত X বিন্দুতে মিলিত হইলে যদি BAX কোণ BCA কোণের সমান হয় তবে দেখাও যে, $BA^2 = BC.BX$.

১০। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের কোনও সমবাহু ACএর লম্ব দ্বিখণ্ডক বর্ধিত CB ভূমিকে D বিন্দুতে ছেদ করিলে, দেখাও যে AC, CB ও CDএর মধ্যকানুপাতিক হইবে।

১১। ABC, PQR দুটি সমান্তরাল সরলরেখা যদি এরূপ হয় যে, AB : BC :: PQ : QR, তবে AP, BQ এবং CR পরস্পর সমান্তরাল অথবা সমবিন্দু হইবে।

১২। ABC ত্রিভুজের A, B ও C বিন্দু হইতে অঙ্কিত সমান্তরাল সরলরেখা BC, CA, AB বাহুর সহিত (আবশ্যক হইলে বর্ধিত হইয়া) যথাক্রমে P, Q ও R বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে, PQR ত্রিভুজ ABC ত্রিভুজের দ্বিগুণ।

১৩। A, B, C, D, E কোন বৃত্তের পরিধিস্থ পাঁচটি বিন্দু; AD ও BE পরস্পর F বিন্দুতে এবং BD ও CE পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করিলে, যদি AB = BC হয়, তবে FG ACএর সমান্তরাল হইবে।

১৪। A ও B কেন্দ্র বিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পর C বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিল; যদি C দিয়া কোনও সরলরেখা প্রথম বৃত্তের সহিত D এবং দ্বিতীয়টির সহিত E বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে দেখাও যে, ACE ও BCD ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফল সমান।

১৫। ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A হইতে ভূমির উপর AD লম্ব ; D হইতে DE ও DF যথাক্রমে AB ও ACএর উপর লম্ব হইলে, দেখাও যে, আয়ত AB.AE = আয়ত AC.AF.

১৬। AB কোনও বৃত্তের ব্যাস, A হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা পরিধিকে C বিন্দুতে এবং B বিন্দুতে স্পর্শককে Dতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, AB AC ও ADএর মধ্যকানুপাতিক এবং আয়ত AC.AD, ADএর সকল অবস্থানের জন্যই এক হইবে।

১৭। দুটি বৃত্ত পরস্পর A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিল; যদি উহাদের কোন সাধারণ স্পর্শক PQ বর্ধিত হইয়া কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে S বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, PA, AQ সংযুক্ত করিলে,

(১) SAP, SQA ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হইবে,

এবং (২) $SA^2 = SP.SQ$.

১৮। দুটি বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল ; A বিন্দুতে উহাদের স্পর্শক পরিধিদ্বয়ের সহিত C ও D বিন্দুতে মিলিত হইলে, দেখাও যে, CB : AB = AB : BD.

১৯। যদি দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত উহাদের ভূমির বর্গের অনুপাতের সমান হয় তবে ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হইবে।

২০। ABCD চতুর্ভুজের CD বাহু A, B, C দিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে স্পর্শ করিলে, যদি আয়ত AB.AC = আয়ত BC.CD হয়, তবে A, C ও D দিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে AB স্পর্শ করিবে।

২১। যদি একটি বৃত্ত দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে বহিঃস্পর্শ করে, তবে স্পর্শ-বিন্দুদ্বয় দিয়া অঙ্কিত রেখা দুই নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া অঙ্কিত রেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করিবে।

২২। ABC, DEF দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে

$\angle A = \angle D$, AB বাহু = DE বাহু ;

দেখাও যে, $\triangle ABC : \triangle DEF :: AC : DF$.

২৩। ABC ত্রিভুজের শিরঃকোণ Aএর বহির্দ্বিখণ্ডক ভূমিকে D বিন্দুতে এবং পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিলে, দেখাও যে,

আয়ত BA.AC = আয়ত EA.AD.

২৪। OC ব্যাসার্ধের উপর A ও B দুইটি বিন্দু এবং P পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু। যদি $OA.OB = OC^2$ হয়, তবে দেখাও যে, AP : BP ধ্রুবক হইবে।

২৫। কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমি সংলগ্ন দুই কোণের বহি-দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের উপর পাতিত লম্ব দুটির পাদবিন্দু সংযোজক রেখা ভূমির সমান্তরাল হইবে।

২৬। কোন বৃত্তে পরিলিখিত সুষম ষড়ভুজ ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত সুষম ষড়ভুজের $\frac{৪}{৩}$ গুণ হইবে।

২৭। যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের এক কোণ অন্যের এক কোণের সমান এবং একের অপর এক কোণ অন্যের অপর এক কোণের সম্পূরক হয়, তবে উহাদের তৃতীয় কোণ-সংলগ্ন বাহুগুলি আনুপাতিক হইবে।

২৮। দুইটি সদৃশকোণ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত ৩ : ২ ; যদি বৃহত্তর ত্রিভুজের কোন উন্নতি ৫·২ সেঃ মিঃ হয়, তবে অপর ত্রিভুজের অনুরূপ উন্নতি কত ?

২৯। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ A হইতে BCএর উপর AD লম্ব ; যদি AB = ৫ সেঃ মিঃ এবং AC = ১২ সেঃ মিঃ হয়, তবে BD ও CDএর দৈর্ঘ্য কত নির্ণয় কর।

৩০। OA, OB দুইটি পরস্পর ছেদিত সরল রেখার ভিতরে P একটি বিন্দু ; P দিয়া সরল রেখা টানিলে OA, OB সন্নিহিত বাহু বিশিষ্ট যে সকল ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে তাহাদের মধ্যে যে রেখা P বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয় তাহা দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ক্ষুদ্রতম হইবে।

৩১। কোন সমকোণী ত্রিভুজের বাহু তিনটি আনুপাতিক হইলে, সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর পাতিত লম্বের দ্বারা বিভক্ত অতিভুজের খণ্ডদ্বয়ের বৃহত্তরটি ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম বাহুর সমান হইবে।

৩২। ABC ত্রিভুজের BC ভূমি D পর্যন্ত বর্ধিত করিলে, যদি $BD : DC = BA^2 : AC^2$ হয়, তবে দেখাও যে, AD BD ও DCএর মধ্যকানুপাতিক হইবে।

৩৩। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমির বা বর্ধিত BC ভূমির অন্তঃস্থ কোনও বিন্দু P হইলে, দেখাও যে, ABP এবং ACP ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্ত দুটি সমান হইবে।

৩৪। ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A এর সহিত ভূমির কোনও বিন্দু সংযোজক সরলরেখা ত্রিভুজটিকে এমন দুই ত্রিভুজে বিভক্ত করিবে যে, উহাদের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অনুপাত AB ও AC এর অনুপাতের সমান হইবে।

৩৫। একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব হইলে, দেখাও যে, উহার বিপরীত বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র দুইটির সমষ্টি চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হইবে।